

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**MÔN THI: TOÁN**

Ngày thi: 1/10/2023

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

**Bài I. (6,0 điểm)**

1) Giải phương trình:  $x^2 + 5x + 3 = (x + 5)\sqrt{x^2 + 3}$

2) Với  $x$  là số thực dương để  $x + \frac{1}{x}$  là số nguyên và  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  là số nguyên tố.

Tính giá trị biểu thức:  $P = x^9 + \frac{1}{x^9}$ .

**Bài II. (5,0 điểm)**

1) Cho  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn  $n^2 + 4$  và  $n^2 + 11$  đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng:  $n$  chia hết cho 5.

2) Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình  $x^3y^3 - 4xy^3 + y^2 + x^2 - 2y - 3 = 0$ .

**Bài III. (2,0 điểm)**

Với các số thực không âm  $a, b$  thỏa mãn:  $a + b = 1$ .

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{4ab}{b^2 + 1}$ .

**Bài IV. (6,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ),  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $A$  lên  $BC$ ,  $M$  là trung điểm của  $AC$ ,  $N$  là trung điểm của  $HC$ . Đường thẳng qua  $C$  song song với  $AB$  cắt  $MN$  tại  $P$ .

1) Chứng minh: Các tam giác  $ABM$  và  $CAP$  đồng dạng.

2) Gọi  $Q$  là chân đường vuông góc kẻ từ  $C$  lên  $AP$ . Chứng minh:  $\widehat{HQN} = 90^\circ$ .

3) Đường thẳng  $HQ$  cắt  $MP$  tại  $I$ , gọi  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $NI$ ,  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $HQ$ . Chứng minh:  $B, G, K$  thẳng hàng.

**Bài V. (1,0 điểm)**

Các số nguyên dương 1; 2; ...; 100 được chia thành 25 tập hợp (tập hợp nào cũng có ít nhất 1 phần tử). Chứng minh rằng tồn tại ba số nguyên dương thuộc cùng một trong những tập hợp đó sao cho ba số đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.