**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**THÀNH PHỐ ĐÔNG HÀ**

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP THCS**
**NĂM HỌC 2023-2024**
**MÔN: TOÁN**

*Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)*

---

**Câu 1 (*5 điểm*).**

1. Chứng minh rằng nếu $a^2 = x^2(y+z), b^2 = y^2(z+x), c^2 = z^2(x+y)$ và $abc = xyz \neq 0$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.

2. Chứng minh rằng nếu $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{c-x}$ thì
$$(a+b+c+x)^2 = 4(ab+bc+ca+x^2).$$

**Câu 2 (*3 điểm*).**

1. Giả sử $n$ là số một nguyên dương sao cho $\sqrt{n}$ là một số hữu tỉ. Chứng minh rằng $\sqrt{n}$ phải là một số nguyên.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương $n$ sao cho $\frac{n+11}{\sqrt{n-1}}$ là một số nguyên.

**Câu 3 (*4 điểm*).**

1. Chứng minh rằng với $a, b, c$ là các số thực dương bất kỳ, ta luôn có bất đẳng thức sau:
$$bc(b+2a)(c+2a) \leq (ab+bc+ca)^2.$$

2. Cho $a, b, c$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{ab+2c^2+2c} + \frac{1}{bc+2a^2+2a} + \frac{1}{ca+2b^2+2b} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}.$$

**Câu 4 (*6 điểm*).**

1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi $E, F$ lần lượt là hình chiếu của $B, D$ lên đường chéo $AC$ và $G, H$ lần lượt là hình chiếu của $A, C$ lên đường chéo $BD$. Biết rằng 4 điểm $E, F, G, H$ tạo thành một tứ giác, chứng minh tứ giác đó cũng là một hình bình hành.

2. Cho tam giác $ABC$ vuông tại $C$ có $CB = 3CA$. Gọi $D, E$ là các điểm trên cạnh $BC$ sao cho $CD = DE = EB$. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} + \widehat{AEC} + \widehat{ABC} = 90°$.

**Câu 5 (*2 điểm*).** Các số nguyên dương được chia vào các tập hợp $S_1, S_2, S_3, S_4$ ... như sau: $S_1 = \{1\}, S_2 = \{2,3\}, S_3 = \{4,5,6\}, S_4 = \{7,8,9,10\}$ và cứ thế tiếp tục. Hỏi phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất của tập $S_{2023}$ là bao nhiêu?

---------**HẾT**---------

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*