

Câu 1 (2,5 điểm).

a) Giải phương trình $4x^2 - 12x - 7 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y = -8 \end{cases}$$
.

c) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + \frac{2}{\sqrt{2} + 1} - \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{11}}$.

Câu 2 (2,0 điểm).

Cho hàm số $y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m$ (với m là tham số).

a) Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = -x^2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ sao cho: $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = -14$.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid – 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?

b) Giải phương trình $(x^2 + 2x)^2 - 6(x + 1)^2 + 15 = 0$

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Vẽ cát tuyến ABC không đi qua tâm O (B nằm giữa A và C). Gọi M là điểm chính giữa cung lớn BC , vẽ đường kính MN cắt BC tại D . Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại E khác M . EN cắt BC tại F .

a) Chứng minh tứ giác $MEFD$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $EM \cdot EA = EN \cdot EF$.

c) Chứng minh $ND^2 = NE \cdot NF - ND \cdot DM$.

d) Biết hai điểm B, C cố định, đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm B, C . Chứng minh: EF là đường phân giác trong tam giác BEC và NE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sqrt{2a + bc} + \sqrt{2b + ca} + \sqrt{2c + ab}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (2,5 điểm).

a) Giải phương trình $4x^2 - 12x - 7 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y = -8 \end{cases}$.

c) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{2}+1} - \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{11}}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $4x^2 - 12x - 7 = 0$.

$$\Delta' = (-6)^2 - 4 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{64} = 8$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{6+8}{4} = \frac{7}{2}; \quad x_2 = \frac{6-8}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x + 3y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -25 \\ x + y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất là $(-5; -3)$

c) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{2}+1} - \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{11}}$.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{2}+1} - \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{11}} \\ &= |\sqrt{2}-1| + \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}^2-1} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}-1 + 2(\sqrt{2}-1) - 3\sqrt{2} = -3 \end{aligned}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

Cho hàm số $y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m$ (với m là tham số).

a) Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = -x^2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ sao cho: $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = -14$.

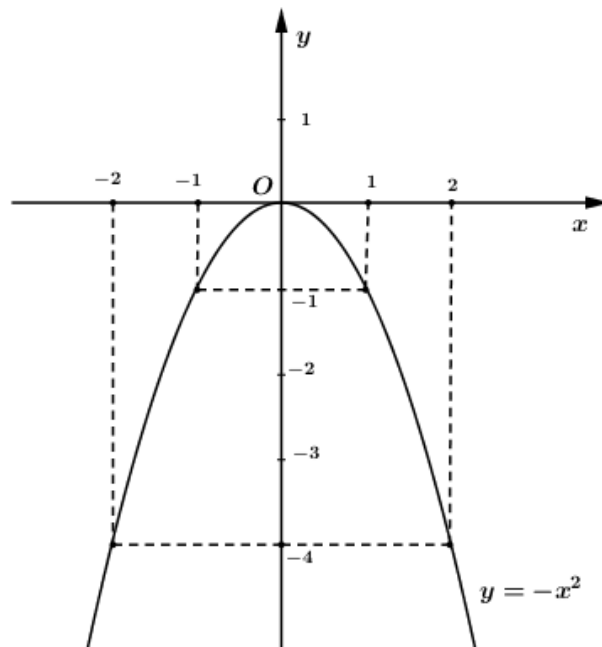
Lời giải

$(P): y = -x^2$, $(d): y = 2x + m$

a) Vẽ $(P): y = -x^2$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$-x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + m = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' = 1 - m$$

(P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Theo hệ thức Vi - et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$$

Ta có $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = -14$

$A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thuộc (d) nên $y_1 = 2x_1 + m$; $y_2 = 2x_2 + m$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1 + m + 2x_2 + m = -14$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2(x_1 + x_2) + 2m = -14$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2 \cdot (-2) + 2m = -14$$

$$\Leftrightarrow m = -4 \quad (\text{tmdk})$$

Vậy $m = -4$.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid - 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?

b) Giải phương trình $(x^2 + 2x)^2 - 6(x+1)^2 + 15 = 0$

Lời giải

a) Gọi số kiện khẩu trang mỗi ngày mà tổ dự định phải làm là x (kiện khẩu trang, $x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang theo dự định là $\frac{120}{x}$ (ngày)

Số kiện khẩu trang làm thực tế mỗi ngày là $x+5$ (kiện)

Thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang thực tế là $\frac{120}{x+5}$ (ngày).

Vì tổ hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = 2 \Leftrightarrow \frac{120(x+5)}{x(x+5)} - \frac{120x}{x(x+5)} = \frac{2x(x+5)}{x(x+5)}$$

$$\Rightarrow 120x + 600 - 120x = 2x^2 + 10x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 600 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$$

$$\text{Tính được } \Delta = 1225 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \text{ (tm)} \\ x_2 = -20 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi tổ phải làm 15 kiện khẩu trang mỗi ngày.

b) Giải phương trình $(x^2 + 2x)^2 - 6(x+1)^2 + 15 = 0$

$$(x^2 + 2x)^2 - 6(x+1)^2 + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 9 = 0 \quad (*)$$

Đặt $x^2 + 2x = t$. Khi đó ta có phương trình

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t-3=0 \Leftrightarrow t=3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) - (x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3 ; 1\}$.

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Vẽ cát tuyến ABC không đi qua tâm O (B nằm giữa A và C). Gọi M là điểm chính giữa cung lớn BC , vẽ đường kính MN cắt BC tại D . Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại E khác M . EN cắt BC tại F .

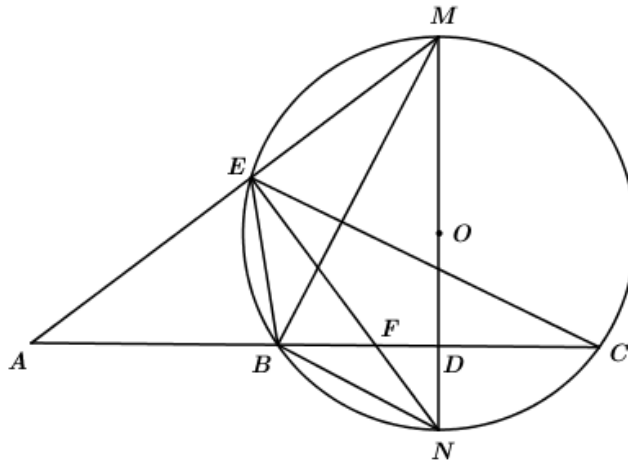
a) Chứng minh tứ giác $MEFD$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $EM \cdot EA = EN \cdot EF$.

c) Chứng minh $ND^2 = NE \cdot NF - ND \cdot DM$.

d) Biết hai điểm B, C cố định, đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm B, C . Chứng minh: EF là đường phân giác trong tam giác BEC và NE luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $MEFD$ nội tiếp được đường tròn.

Ta có $MB = MC$ (gt) $\Rightarrow MN \perp BC \Rightarrow MDF = 90^\circ$

$\Rightarrow MEF = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow MEF + MDF = 180^\circ$

\Rightarrow Tứ giác $MEFD$ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $EM \cdot EA = EN \cdot EF$.

Xét $\triangle EMN$ và $\triangle EFA$ có:

$$\angle MEN = \angle AEF = 90^\circ$$

$$\angle EMN = \angle EFA \text{ (cùng bù } \angle AFD)$$

$$\Rightarrow \triangle EMN \sim \triangle EFA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EA} \Rightarrow EM \cdot EA = EN \cdot EF.$$

c) Chứng minh $ND^2 = NE \cdot NF - ND \cdot DM$.

Xét $\triangle NBF$ và $\triangle NEB$ có:

$$\angle NEB = \angle NBF \text{ (vì } NB = NF)$$

$\angle BNE$ chung

$$\Rightarrow \triangle NBF \sim \triangle NEB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{NB}{NE} = \frac{NF}{NB} \Rightarrow NB^2 = NE \cdot NF \quad (1)$$

Ta có $\triangle NBM$ vuông tại B , có DB đường cao

$$\Rightarrow NB^2 = ND \cdot NM \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } NE \cdot NF = ND \cdot NM = ND \cdot (ND + DM) = ND^2 + ND \cdot DM$$

$$\Rightarrow ND^2 = NE \cdot NF - ND \cdot DM.$$

d) Chứng minh: EF là đường phân giác trong tam giác BEC và NE luôn đi qua một điểm cố định.

$\triangle BEC$ có: $BEC = CEF$ (vì $BN = CN$)

$\Rightarrow EF$ là phân giác trong $\triangle BEC$

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{BF}{CF} \quad (3)$$

Mà $EA \perp EF$ (cmt),

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$

Mà $\frac{AB}{AC}$ không đổi nên $\frac{BF}{CF}$ không đổi

Điểm F nằm giữa B và C mà $\frac{BF}{CF}$ không đổi nên F cố định.

Vậy NE luôn đi qua một điểm cố định là F .

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sqrt{2a + bc} + \sqrt{2b + ca} + \sqrt{2c + ab}$.

Lời giải

Ta có $Q = \sqrt{2a + bc} + \sqrt{2b + ca} + \sqrt{2c + ab}$

$$\sqrt{2a + bc} = \sqrt{(a + b + c)a + bc} \quad (\text{Do } a + b + c = 2)$$

$$= \sqrt{a^2 + ab + bc + ca} = \sqrt{(a + b)(a + c)} \leq \frac{(a + b) + (a + c)}{2} \quad (\text{Áp dụng bất đẳng thức với 2 số dương } u = a + b \text{ và } v = a + c)$$

$$\text{Vậy ta có } \sqrt{2a + bc} \leq \frac{(a + b) + (a + c)}{2} \quad (1)$$

Tương tự ta có :

$$\sqrt{2b + ca} \leq \frac{(a + b) + (b + c)}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2c + ab} \leq \frac{(a + c) + (b + c)}{2} \quad (3)$$

Cộng (1) (2) (3) vế theo vế $\Rightarrow Q \leq 2(a + b + c) = 4$

Khi $a = b = c = \frac{2}{3}$ thì $Q = 4$. Vậy giá trị lớn nhất của Q là 4.

---Hết---