

**Bài 1. (1,5 điểm).** Cho các biểu thức

$$A = \sqrt{28} - \sqrt{63} + \frac{7 + \sqrt{7}}{\sqrt{7}} - \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2}$$

$$B = \left( \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} \right) \frac{4\sqrt{x+12}}{\sqrt{x}} \quad (\text{Điều kiện: } x > 0; x \neq 9)$$

a) Rút gọn các biểu thức  $A, B$ .

b) Tìm các giá trị của  $x$  để giá trị của biểu thức  $A$  lớn hơn giá trị biểu thức  $B$ .

**Bài 2. (1,5 điểm).**

1. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3(x + 3y + 5) = 2x + y \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

2. Mẹ Nam đi chợ bán  $x$  quả na, mẹ Nam bán được 1 quả giá 50 000 (đồng) và 4 quả giá 35 000 (đồng), số na còn lại mẹ bán với giá 12 000 (đồng) một quả. Gọi  $y$  (nghìn đồng) là số tiền mà mẹ Nam thu được sau khi bán hết  $x$  quả na.

a) Lập công thức tính  $y$  theo  $x$ .

b) Hỏi mẹ Nam đã bán bao nhiêu quả na biết số tiền mẹ Nam thu được là 730 000 (đồng)?

**Bài 3. (2,5 điểm).**

1. Cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2(m-1)x - m + 2$  (với  $m$  là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  khi  $m = 2$ .

b) Tìm điều kiện của tham số  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại 2 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| = 2$ .

**2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:**

Để sửa một ngôi nhà cần một số thợ làm việc trong một thời gian quy định. Nếu giảm 3 người thì thời gian kéo dài 6 ngày. Nếu tăng thêm 2 người thì xong sớm 2 ngày. Hỏi theo quy định cần bao nhiêu thợ và làm xong trong bao nhiêu ngày, biết rằng khả năng lao động của mỗi thợ đều như nhau?

**Bài 4. (0,75 điểm).**

Một lon nước ngọt hình trụ có thể tích bằng  $108\pi$  (cm<sup>3</sup>). Biết chiều cao của lon nước ngọt gấp 2 lần đường kính đáy. Tính diện tích vật liệu cần dùng để làm một vỏ lon như vậy (bỏ qua diện tích phân ghép nối).

**Bài 5. (3,0 điểm).**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  ( $D \in BC, E \in AC, F \in AB$ ) của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AH$ ,  $S$  là giao điểm của  $EF$  và  $BC$ . Chứng minh rằng

a) Các tứ giác  $AEHF, BFEC$  nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác  $AOMN$  là hình bình hành.

c)  $MF$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $SDF$ .

**Bài 6. (0,75 điểm).** Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z \leq 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}).$$

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi 1: ..... Cán bộ coi thi 2: .....

**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN TOÁN**  
(gồm 05 trang)

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
<b>1</b> <b>(1,5đ)</b>	<b>1a. (1,0 điểm)</b>	
	$A = \sqrt{28} - \sqrt{63} + \frac{7 + \sqrt{7}}{\sqrt{7}} - \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2}$	<b>0,25</b>
	$= 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} + 1)}{\sqrt{7}} -  \sqrt{7} + 1 $	
	$= -\sqrt{7} + (\sqrt{7} + 1) - (\sqrt{7} + 1) = -\sqrt{7}$	<b>0,25</b>
	$B = \left( \frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x} - 3} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x} + 12}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{4(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x}}$	<b>0,25</b>
	$= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{4(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x}} = \frac{8}{\sqrt{x} - 3}$	<b>0,25</b>
	<b>1b. (0,5 điểm)</b>	
$A > B \Leftrightarrow -\sqrt{7} > \frac{8}{\sqrt{x} - 3} \Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{x} - 3} + \sqrt{7} < 0$	<b>0,25</b>	
$\Leftrightarrow \frac{8 - 3\sqrt{7} + \sqrt{7}x}{\sqrt{x} - 3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \text{ (vì } 8 - 3\sqrt{7} + \sqrt{7}x > 0)$		
$\Leftrightarrow x < 9$	<b>0,25</b>	
Kết hợp với điều kiện $x > 0; x \neq 9$ Ta có $0 < x < 9$		
<b>2</b> <b>(1,5đ)</b>	<b>1. (0,75 điểm)</b>	
	$\begin{cases} 3(x + 3y + 5) = 2x + y \\ x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9y + 15 = 2x + y \\ x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = -15 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$	<b>0,25</b>
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = -15 \\ 6y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = -15 \\ y = -2 \end{cases}$	<b>0,25</b>
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$	<b>0,25</b>
	Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (1; -2)$ .	
<b>2. (0,75 điểm)</b>		
2.a) Số tiền bán 1 quả giá 50 000 (đồng) và 4 quả giá 35 000 (đồng): 190 000 (đồng)	<b>0,25</b>	

	Số quả na mẹ Nam bán với giá 12 000 (đồng) một quả là: $x - 5$	
	Ta có $y = 190 + 12(x - 5)$ $y = 12x + 130$ (*)	0,25
	b) biết số tiền mẹ Nam thu được là 730 000 (đồng) $\Rightarrow y = 730$ Thay vào (*) ta được: $12x + 130 = 730 \Leftrightarrow x = 50$ .	0,25
	Vậy mẹ Nam đã bán 50 quả na	
3 (2,5đ)	<b>1a. (0,5 điểm)</b>	
	Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $x^2 = 2(m - 1)x - m + 2$ $\Leftrightarrow x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$ (*)	0,25
	Thay $m = 2$ vào (*) ta được $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$	
	$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$ $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 4$ Tọa giao điểm của (P) và (d) là (0;0); (2;4)	0,25
	<b>1b. (1,0 điểm)</b>	
	$\Delta = (2m - 3)^2 + 3 > 0$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của $m$	0,25
	Theo hệ thức Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$	0,25
	Ta có $ x_1 - x_2  = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$ $\Rightarrow (2m - 2)^2 - 4(m - 2) = 4$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 4m + 8 = 4$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 8 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (m - 1)(m - 2) = 0$ $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$	0,25
	Vậy $m \in \{1; 2\}$ (d) cắt (P) tại 2 điểm thỏa mãn $ x_1 - x_2  = 2$	0,25
	<b>2. (1,0 điểm)</b>	
Gọi số thợ cần thiết là $x$ (người) (Đk: $x \in \mathbb{N}^*, x > 3$ ) Thời gian cần thiết là $y$ (ngày), ( $y > 2$ )	0,25	

	<p>Nếu giảm ba người thì thời gian kéo dài sáu ngày nên ta có pt:  <math>(x - 3)(y + 6) = xy</math></p> <p>Nếu tăng thêm hai người thì xong sớm hai ngày nên ta có pt:  <math>(x + 3)(y - 2) = xy</math></p> <p>Ta có hệ phương trình: <math display="block">\begin{cases} (x - 3)(y + 6) = xy \\ (x + 2)(y - 2) = xy \end{cases}</math></p>	0,25
	<p>Giải hệ phương trình ta được</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases} (t / m)$	0,25
	Vậy theo quy định cần 8 người thợ và làm trong 10 ngày.	0,25
4 (0,75đ)	<p>Gọi bán kính đáy lon nước ngọt đó là <math>r</math> (<math>r &gt; 0</math>)</p> <p>Ta có: <math>V = 4r \cdot \pi \cdot r^2 = 108\pi</math> (<math>cm^3</math>)</p> <p><math>\Rightarrow</math> bán kính <math>r = 3</math> (<math>cm</math>)</p>	0,25
	<p>Diện tích toàn phần một vỏ lon như vậy là:</p> $Stp = 4r \cdot \pi \cdot 2r + 2\pi r^2 = 10\pi r^2 = 90\pi$ ( $cm^2$ )	0,25
	Vậy diện tích vật liệu cần dùng để làm một vỏ lon là $90\pi$ ( $cm^2$ )	0,25
<b>Vẽ hình đúng cho phần a</b>		
		0,25
<b>a. (1,0 điểm)</b>		
	<p>Xét tứ giác AEHF có</p> <p><math>\widehat{AEH} = 90^\circ</math> (Do <math>BE \perp AC</math>)</p> <p><math>\widehat{AFH} = 90^\circ</math> (Do <math>CF \perp AB</math>)</p>	0,25
	<p>Từ trên suy ra <math>\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ</math>.</p> <p>Vậy tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn tâm N.</p>	0,25

4 (3,0 đ)	+ Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (Do $BE \perp AC$ ) $\widehat{BFC} = 90^\circ$ (Do $CF \perp AB$ )	0,25
	Từ trên suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ . Vậy tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm $M$ .	0,25
	<b>b. (1,0 điểm)</b>	
	Do $M, N$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $BFEC, AEHF$ nên ta có $MN \perp EF$ (1)	0,25
	Kẻ tia tiếp tuyến $Ax$ (như hình vẽ) Theo câu a) ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$ (2)	
	Lại có: $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}sd\widehat{AB}$ (Góc nội tiếp chắn cung $\widehat{AB}$ ) $\widehat{xAB} = \frac{1}{2}sd\widehat{AB}$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)	0,25
	Từ trên suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{xAB}$ (3)	0,25
	Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$ , mà hai góc này ở vị trí so le trong. Vậy ta có $EF // Ax$ . Mà $OA \perp Ax \Rightarrow OA \perp EF$ (4)	
	Từ (1) và (4) suy $MN // OA$ (5)	
	Ta có: $AD \perp BC$ (Do $AD$ là đường cao của tam giác $ABC$ ) Lại có: $OM \perp BC$ (đường kính đi qua trung điểm của dây) Suy ra $AN // OM$ (6)	0,25
Từ (5) và (6) suy ra tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.		
<b>c. (0,75 điểm)</b>		
Theo câu a) ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$ Ta cũng chứng minh được tứ giác $BDHC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HFD} = \widehat{HBD}$	0,25	
Từ trên suy ra $\widehat{EFH} = \widehat{HFD}$ Vậy ta có $\widehat{AFE} = \widehat{DFB}$ mà $\widehat{AFE} = \widehat{SFB}$ (đối đỉnh)		
Suy ra $\widehat{BFD} = \widehat{SFB}$ (7)	0,25	
Do tam giác $BFC$ vuông tại $F$ , có $FM$ là đường trung tuyến nên suy ra		

	$FM = MB \Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MBF} \quad (8)$	
	<p>Mà <math>MBF = \widehat{S} + \widehat{SFB} \quad (9)</math> (Góc ngoài tam giác)</p> $\widehat{MFB} = \widehat{BFD} + \widehat{DFM} \quad (10)$ <p>Từ (7), (8), (9) và (10) suy ra <math>\widehat{S} = \widehat{MFD}</math></p> <p>Vậy ta có <math>MF</math> là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>SFD</math>.</p>	<b>0,25</b>
	<b>(0,75 điểm)</b>	
	<p>Chúng minh bài toán phụ sau <math>\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}</math> (*) với mọi <math>a, b</math> dương.</p> <p>Ta có <math>\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{2(a+b)})^2</math></p> $\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \leq 2(a+b) \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$ <p>Bất đẳng thức xảy ra dấu “=” khi và chỉ khi <math>a = b</math>.</p>	<b>0,25</b>
	<p>Áp dụng bất đẳng thức (*) với <math>x &gt; 0</math> ta có:</p> $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2x} \leq \sqrt{2(1+x)^2} = \sqrt{2}(x+1), \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = 1.$ <p>Tương tự với <math>y &gt; 0, z &gt; 0</math>, ta có:</p> $\sqrt{1+y^2} + \sqrt{2y} \leq \sqrt{2(1+y)^2} = \sqrt{2}(y+1), \text{ dấu bằng xảy ra khi } y = 1.$ $\sqrt{1+z^2} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{2(1+z)^2} = \sqrt{2}(z+1), \text{ dấu bằng xảy ra khi } z = 1.$ <p>Cộng từng vế 3 bất đẳng thức trên ta được:</p> $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{2}[(x+1) + (y+1) + (z+1)]$ $\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$ $\leq \sqrt{2}[(x+1) + (y+1) + (z+1)] + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$ $\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$ $\leq \sqrt{2}[(x+1) + (y+1) + (z+1)] + (2 - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$	<b>0,25</b>
<b>6</b> <b>(0,75đ)</b>	<p>Lại có <math>\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}; \sqrt{y} \leq \frac{y+1}{2}; \sqrt{z} \leq \frac{z+1}{2}</math> nên suy ra</p> $P \leq \sqrt{2}[(x+1) + (y+1) + (z+1)] + (2 - \sqrt{2})\left(\frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} + \frac{z+1}{2}\right)$ $= \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2}\right)(x + y + z + 3) \leq \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2}\right)(3 + 3) = 6 + 3\sqrt{2}.$ <p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi <math>x = y = z = 1</math>.</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là <math>6 + 3\sqrt{2}</math> khi <math>x = y = z = 1</math>.</p>	<b>0,25</b>

\* **Chú ý:**

- Trên đây chỉ trình bày một cách giải, nếu học sinh làm cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó.
- Học sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu:
  - + Có nhiều ý mà các ý phụ thuộc nhau, học sinh làm phần trên sai phần dưới đúng thì không cho điểm.
  - + Có nhiều ý mà các ý không phụ thuộc nhau, học sinh làm đúng ý nào thì cho điểm ý đó.
- Bài hình học, học sinh vẽ sai hình thì không chấm điểm. Học sinh không vẽ hình mà vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.
- Bài làm có nhiều ý liên quan đến nhau, nếu học sinh công nhận ý trên mà làm đúng ý dưới thì cho điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.