

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,5 điểm):

a) Tính $A = 5\sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}+1} - \sqrt{45}$

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0; x \neq 1$

c) Cho đường thẳng d: $y = (m-1)x + n + 2$. Tìm m, n để đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y + 2x - 3 = 0$ và đi qua điểm A(2;4).

Câu 2 (2,0 điểm):

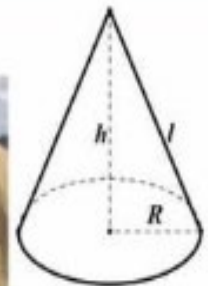
a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

b) Cho phương trình: $x^2 + 2(m+3)x + m^2 - 3 = 0$ với m là tham số.

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 = 22$

Câu 3 (2,0 điểm): a) Một hình chữ nhật có diện tích bằng 40 cm². Nếu tăng chiều rộng thêm 3 cm và tăng chiều dài thêm 3 cm thì diện tích của hình chữ nhật tăng thêm 48 cm². Tính các kích thước ban đầu của hình chữ nhật.

b) Bác An có đống cát dạng hình nón cao 2m; đường kính đáy là 6m; Bác tính rằng để sửa xong ngôi nhà của mình bác cần 30m³. Hỏi bác An cần mua bổ sung bao nhiêu m³ cát nữa để đủ sửa xong nhà (Lấy $\pi = 3.14$ và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



Câu 4 (3,0 điểm): Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm D, E (AD < AE, d không đi qua tâm O).

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp.

b) Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh $AB^2 = AH \cdot AO$.

c) Đường thẳng DH cắt (O) tại điểm thứ hai F, AF cắt (O) tại điểm K $\neq F$. Chứng minh ba điểm E, H, K thẳng hàng

Câu 5 (0,5 điểm): Cho ΔABC có chu vi bằng 2. Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của ΔABC

Chứng minh rằng: $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c} \geq 11$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác gì?

-----Hết-----

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1. (2,5 điểm)

a) Tính $A = 5\sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{4}{\sqrt{5+1}} - \sqrt{45}$

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ với $x > 0; x \neq 1$

c) Cho đường thẳng d: $y = (m-1)x + n + 2$. Tìm m, n để đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng $y + 2x - 3 = 0$ và đi qua điểm A(2;4).

$A = 5\sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{4}{\sqrt{5+1}} - \sqrt{45}$ <p>a) $= 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 - 3\sqrt{5}$ $= -1$</p>	<p>0,5 0,5</p>
<p>b) Ta có $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x+1}}$</p> $= \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} \cdot (\sqrt{x+1})$ $= \frac{x-1}{\sqrt{x}}$	<p>0,5 0,5</p>
<p>c)</p> <p>+ (d): $y = (m-1)x + n + 2$ vuông với đường thẳng: $y + 2x - 3 = 0$ hay $y = -2x + 3$ Nên $(m-1) \cdot (-2) = -1$ $\Rightarrow m-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$</p>	<p>0,25</p>
<p>+ (d) đi qua điểm A(2;4) $\Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \cdot 2 + n + 2 \Leftrightarrow 4 = 1 + n + 2 \Rightarrow n = 1$ (TM)</p> <p>Vậy $m = \frac{3}{2}; n = 1$</p>	<p>0,25</p>

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

b) Cho phương trình: $x^2 + 2(m+3)x + m^2 - 3 = 0$ với m là tham số.

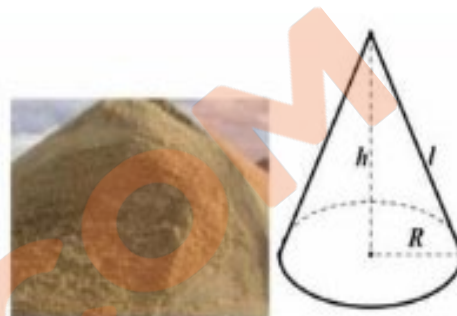
Tìm m để phương trình trên có 2 nghiệm thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 = 22$

<p>a) Ta có: $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 18 \\ 9x + 6y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 39 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$</p> <p>Nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = (3;-1)$</p>	<p>0,5 0,5</p>
--	--------------------

b) Ta có: $\Delta' = 6m + 12$	0,25
Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$	0,25
Theo viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$	
Hệ thức: $x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 = 22 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 = 22$	0,25
Suy ra: $4(m^2 + 6m + 9) - 3(m^2 - 3) = 22 \Leftrightarrow m^2 + 24m + 23 = 0$	
Giải ra được $m = -1$ (TM) hoặc $m = -23$ (loại)	0,25
Vậy $m = -1$ thì giá trị của biểu thức $x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 = 22$	

Câu 3 (2.0 điểm): a) Một hình chữ nhật có diện tích bằng 40 cm². Nếu tăng chiều rộng thêm 3 cm và tăng chiều dài thêm 3 cm thì diện tích của hình chữ nhật tăng thêm 48 cm². Tính các kích thước ban đầu của hình chữ nhật.

b) Bác An có đồng cát dạng hình nón cao 2m; đường kính đáy là 6m; Bác tính rằng để sửa xong ngôi nhà của mình bác cần 30m³. Hỏi bác An cần mua bổ sung bao nhiêu m³ cát nữa để đủ sửa xong nhà (Lấy $\pi = 3.14$ và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



a) Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x (cm) và y (cm) ($x; y > 0$).	0,25
Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} xy = 40 \\ (x+3)(y+3) = xy + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 40 \\ x + y = 13 \end{cases}$	0,25
Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 13t + 40 = 0$ (1).	0,25
Giải phương trình (1) ta được hai nghiệm là 8 và 5.	0,25
Vậy các kích thước của hình chữ nhật là 8 cm và 5 cm.	0,25

b)	0,25
Vi đồng cát hình nón có chiều cao $h = 2m$ và bán kính đáy $R = 6: 2 = 3m$ nên thể tích của đồng cát là: $V_{\text{đồng cát}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 2 = 18,84 (m^3)$	
Vậy để đủ cát sửa nhà, bác An cần mua bổ sung thêm số cát là $30 - 18,84 = 11,16m^3$.	0,25
Note: Số cát cần mua = Số cát yêu cầu - Số cát hiện có	
Thể tích h.nón: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} V_{\text{trụ}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$	



Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm D, E ($AD < AE$, d không đi qua tâm O).

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Gọi H là giao điểm của OA và BC . Chứng minh $AB^2 = AH.AO$.

c) Đường thẳng DH cắt (O) tại điểm thứ hai F , AF cắt (O) tại điểm $K \neq F$. Chứng minh ba điểm E, H, K thẳng hàng

		0,5
a.	AB, AC là tiếp tuyến với đường tròn (O) .	0,5
1,0	Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ Vậy tứ giác $ABOC$ nội tiếp.	0,5
b.	AB, AC là tiếp tuyến với đường tròn (O) . Suy ra $AB = AC$.	0,25
1,0	Mà $OB = OC$. Do đó OA là đường trung trực của đoạn thẳng BC , vì thế $OA \perp BC$.	0,25
	Xét tam giác OAB vuông tại B , đường cao BH . Ta có	0,25
	$AB^2 = AH.AO$	0,25
c.	Tứ giác $ABOC$ nội tiếp suy ra $\widehat{OBH} = \widehat{CAH}$ $\Rightarrow \triangle OBH \sim \triangle CAH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HO}{HC}$ $\Rightarrow HA.HO = HB.HC$	0,25
0,5	Tứ giác $BDCF$ nội tiếp, tương tự ta cũng suy ra $HD.HF = HB.HC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $OH.HA = DH.HF$ $\Rightarrow \frac{OH}{DH} = \frac{HF}{HA}$ $\Rightarrow \triangle HDA \sim \triangle HOF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OFD}$ do đó tứ giác $ADOF$ nội tiếp.	

<p>Suy ra $\widehat{DOA} = \widehat{DFA} = \widehat{DEK}$ (3).</p> <p>Lại có $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$.</p> <p>Kết hợp câu a) suy ra</p> $AD \cdot AE = AH \cdot AO \Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{AO}{AE} \Rightarrow \triangle AHD \sim \triangle AEO$ (c.g.c). <p>$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$</p> <p>Suy ra tứ giác DHOE nội tiếp do đó $\widehat{DEH} = \widehat{DOH}$ (4).</p> <p>Từ (3) (4) suy ra $\widehat{DEH} = \widehat{DEK}$ hay E, H, K thẳng hàng.</p>	0,25
---	------

Câu 5: (0.5 điểm)

Cho $\triangle ABC$ có chu vi bằng 2. Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của $\triangle ABC$

Chứng minh rằng: $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c} \geq 11$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác gì?

<p>Ta có $a + b + c = 2$</p> <p>Đặt $b + c - a = x$ (1)</p> <p>$c + a - b = y$ (2)</p> <p>$a + b - c = z$ (3)</p> <p>Suy ra $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 2$ (vì $a + b + c = 2$)</p> <p>Cộng (2) và (3) vế theo vế, ta được $a = \frac{y+z}{2}$</p> <p>Tương tự: $b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$</p> <p>Do đó: $A = \frac{y+z}{2x} + \frac{4(x+z)}{2y} + \frac{9(x+y)}{2z}$</p> $A = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{4x}{y} + \frac{4z}{y} + \frac{9x}{z} + \frac{9y}{z} \right)$ $A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{9x}{z} \right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z} \right) \right]$ $A \geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{9x}{z}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y} \cdot \frac{9y}{z}} \right) \text{ (Bất đẳng thức cô - si)}$ <p>$A \geq 11$</p>	0,25
<p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi</p> $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{4x}{y} \\ \frac{z}{x} = \frac{9x}{z} \\ \frac{4z}{y} = \frac{9y}{z} \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ z = \frac{3}{2}y \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
<p>Khi đó $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông.</p>	