

Bài I (2 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A tại $x = 16$.
- 2) Rút gọn biểu thức $P = A.B$.
- 3) Tìm tất cả giá trị x để $(6x+18).P \geq x+9$.

Bài II (2 điểm): Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

1) Hai người thợ cùng xây một bức tường trong 3 giờ 45 phút thì xong. Nhưng họ chỉ làm chung trong 3 giờ thì người thứ nhất được điều đi làm việc khác, người thứ hai xây tiếp bức tường còn lại trong 2 giờ nữa thì xong. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người xây xong bức tường trong bao lâu?

2) Một thùng nước hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy và bằng 1m. Thùng nước này có thể đựng được $1m^3$ nước không? Tại sao? (Lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài III (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{2x-1} - \frac{y}{y+1} = 1 \\ \sqrt{2x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = m.x + 2$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A và B. Tìm tất cả các giá trị m để x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2|x_2|$.

Bài IV (3 điểm) Cho nửa đường tròn tâm (O), đường kính $AB = 2R$. Vẽ bán kính OC vuông góc với AB. Lấy điểm K bất kì thuộc cung AC, kẻ KH vuông góc với AB tại H. Tia AC cắt HK tại I, tia BI cắt nửa tròn tại điểm E.

- 1) Chứng minh tứ giác BHIC nội tiếp;
- 2) Chứng minh $AI.AC = AH. AB$ và tổng $AI.AC + BI.BE$ không đổi.
- 3) Chứng minh HE vuông góc với CE và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEH nằm trên đường thẳng cố định khi K di động trên cung AC.

Bài V (0,5 điểm) Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ca} + \sqrt{3c+ab}$.

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG – LẦN I (20/4/2023)

| BÀI | Ý | NỘI DUNG | ĐIỂM |
|--|--------------------|--|-------------|
| Bài I 2 điểm | 1 (0,5 điểm) | 1) Tính giá trị biểu thức A tại $x=16$; | 0,5 |
| | | Thay $x=16$ (TMĐK) vào biểu thức A, ta có : | 0,25 |
| | | $A = \frac{\sqrt{16}-2}{16+3} = \frac{4-2}{19} = \frac{2}{19}$ | 0,25 |
| | 2 (điểm) | 2) Rút gọn biểu thức $P = A.B$ | 1 |
| | | $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)-2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ | 0,25 |
| | | $= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ | 0,25 |
| | | $= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ | 0,25 |
| | | $\Rightarrow P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$ Vậy $P = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$ với $x \geq 0; x \neq 4$. | 0,25 |
| | 3 (0,5 điểm) | 3) Tìm x để $(6x+18).P \geq x+9$. | 0,5 |
| | | Ta có : $(6x+18).P \geq x+9$ $\Leftrightarrow 6(x+3) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+3} \geq x+9$ $\Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9 \leq 0$ | 0,25 |
| $\Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 \leq 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=0$ $\Leftrightarrow x=9(TM)$ Vậy với $x=9$ thì $(6x+18).P \geq x+9$. | | 0,25 | |
| Bài II 2 điểm | 1 1,5 điểm | Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người xây xong bức tường trong bao lâu? | 1,5 |
| | | Gọi x là thời gian để người thứ nhất xây một mình xong bức tường $\left(h, x > \frac{15}{4}\right)$ Gọi y là thời gian để người thứ hai xây một mình xong bức tường $(h, y > \frac{15}{4})$ | 0,25 |
| | | Trong 1 giờ, người thứ nhất xây được: $\frac{1}{x}$ (bức tường) Trong 1 giờ, người thứ hai xây được: $\frac{1}{y}$ (bức tường) | |

| | | | |
|--|------------------|--|------|
| | | <p>Trong 1 giờ, cả hai người xây được: $\frac{1}{15} = \frac{4}{15}$ (bức tường)</p> <p>Ta có PT: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{15}$ (1)</p> | 0,25 |
| | | <p>Trong 3 giờ, người thứ nhất xây được: $\frac{3}{x}$ (bức tường)</p> <p>Trong 5 giờ, người thứ hai xây được: $\frac{5}{y}$ (bức tường)</p> <p>Ta có PT: $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1$ (2)</p> | 0,25 |
| | | <p>Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{15} \\ 3 \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \quad (I)$ | 0,25 |
| | | <p>Đặt: $\begin{cases} a = \frac{1}{x} \\ b = \frac{1}{y} \end{cases}$</p> <p>Hệ (I) trở thành:</p> $\begin{cases} a + b = \frac{4}{15} \\ 3a + 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{10} \end{cases}$ <p>Do đó: $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 10 \end{cases} \quad (TM)$</p> | 0,25 |
| | | <p>Người thứ nhất xây xong bức tường trong 6 giờ. Người thứ hai xây xong bức tường trong 10 giờ.</p> | 0,25 |
| | 2 0,5 điểm | <p>Thể tích</p> <p>Ta có $h = d = 2r = 1$ $\Rightarrow r = \frac{1}{2} (m)$</p> <p>Mà thể tích của thùng nước hình trụ là:</p> $V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi \cdot r^3 = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 0,79(m^3)$ | 0,25 |
| | | <p>Do $0,79(m^3) < 1m^3$</p> <p>Vậy thùng nước này không thể đựng được $1m^3$ nước.</p> | 0,25 |

| | | | |
|-----------------------------------|---|--|-------------|
| Bài III 2,5 điểm | 1) 1 điểm | 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{2x-1} - \frac{y}{y+1} = 1 \\ \sqrt{2x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5 \end{cases}$ | 1 |
| | | (I) $\begin{cases} 3\sqrt{2x-1} - \frac{y}{y+1} = 1 \\ \sqrt{2x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5 \end{cases} \quad \text{ĐK: } x \geq \frac{1}{2}; y \neq -1$ Đặt $\sqrt{2x-1} = a; \frac{y}{y+1} = b$ Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 1 \\ a + 2b = 5 \end{cases}$ | 0,25 |
| | | Giải hệ ta được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ | 0,25 |
| | | Suy ra $\begin{cases} \sqrt{2x-1} = 1 \\ \frac{y}{y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 1 \\ y = 2y+2 \end{cases}$ | 0,25 |
| | | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (TM)} \\ y = -2 \text{ (TM)} \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -2)$ | 0,25 |
| | 2 1,5 điểm | a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m. | 0,75 |
| | Xét hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 = mx + 2$ $\Leftrightarrow x^2 - mx - 2 = 0(*)$ | 0,25 | |
| | Do $a.c = 1.(-2) = -2 < 0$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm trái dấu. | 0,25 | |
| | Vậy đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m. | 0,25 | |
| | b) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A và B. Tìm tất cả các giá trị m để x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2 x_2$. | 0,75 | |
| | Do đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m. Theo Vi ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = m(1) \\ x_1 x_2 = -2(2) \end{cases}$ Do $a.c = 1.(-2) = -2 < 0$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm trái dấu. Mà $x_1 = 2 x_2 \Rightarrow x_1 > 0; x_2 < 0$ | 0,25 | |

| | | | |
|--------------------------|----------|--|-------------|
| | | $x_1 = 2 x_2 $ $\Leftrightarrow x_1 = -2x_2$ <p>Ta được hệ:</p> $\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ -2x_2^2 = -2; x_2 < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ | 0,25 |
| | | Thay x_1, x_2 vào (2) ta được $x_1 + x_2 = m$ $\Leftrightarrow -1 + 2 = m$ $\Leftrightarrow m = 1$ Vậy $m \in \{1\}$ thỏa mãn đề bài. | 0,25 |
| Bài IV (3 điểm m) | (3 điểm) | <p>Vẽ hình</p> | 0,25 |
| | | 1) Chứng minh tứ giác BHIC nội tiếp | 0,75 |
| | | 1) Xét đường tròn (O) Do $KH \perp AB \Rightarrow \widehat{BHI} = 90^\circ$ $\widehat{ICB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) | 0,25 |
| | | Xét tứ giác BHIC có: $\widehat{BHI} + \widehat{ICB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ | 0,25 |
| | | Mà 2 góc ở vị trí đối nhau. \Rightarrow Tứ giác BHIC nội tiếp (dnhb). | 0,25 |
| | | 2) Chứng minh $AI \cdot AC = AH \cdot AB$ và $AI \cdot AC + BI \cdot BE$ không đổi | 1,5 |
| | | Chứng minh | |

| | | |
|---|---|------------|
| | $\Delta AIH \sim \Delta ABC (g.g)$ $\Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{AB}{AC}$ $\Rightarrow AI.AC = AB.AH(1)$ | 0,5 |
| | $\widehat{BEA} = 90^0 \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$ $\Delta BHI \sim \Delta BEA (g.g)$ $\Rightarrow \frac{BH}{BI} = \frac{BE}{AB}$ $\Rightarrow BE.BI = BH.AB(2)$ | 0,5 |
| | $AI.AC + BI.BE = AB.AH + AB.BH = AB^2$ <p>Từ (1) và (2)</p> <p>Mà $AB=2R$</p> | 0,25 |
| | $\Rightarrow AI.AC + BI.BE = 4R^2$ <p>Do R không đổi.</p> $AI.AC + BI.BE$ <p>Vậy không đổi.</p> | 0,25 |
| | <p>3) Chứng minh $HE \perp CE$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEH nằm trên đường thẳng cố định khi K di động trên cung AC.</p> | 0.5 |
| | <p>Chứng minh tứ giác IEAH nội tiếp</p> $\widehat{IEH} = \widehat{IAH} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IH)}$ <p>Mà $\widehat{CEB} = \widehat{CAB} = \frac{1}{2} \text{ SđCB}$</p> | |
| | <p>Chứng minh ΔCOA vuông cân tại O $\Rightarrow \widehat{CAB} = 45^0$</p> $\Rightarrow \widehat{CEB} + \widehat{BEH} = 2\widehat{CAB} = 2.45^0 = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{CEH} = 90^0$ $\Rightarrow HE \perp CE$ | 0,25 |
| | <p>Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEH là O'</p> <p>Gọi M là trung điểm của CO.</p> $\Rightarrow O'M // HO$ | |
| | <p>\Rightarrow O'M là đường trung trực của đoạn thẳng OC.</p> <p>Vậy khi K di động trên cung AC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEH nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng CO cố định.</p> | 0,25 |
| Bài V 0,5 điểm | <p>Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</p> $Q = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ca} + \sqrt{3c+ab}.$ | 0,5 |
| | <p>Ta có $Q = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ca} + \sqrt{3c+ab}.$</p> | |

| | | |
|--|---|------|
| | <p>Mà $\sqrt{3a+bc} = \sqrt{(a+b+c)a+bc}$ (Do $a+b+c=3$)</p> $= \sqrt{a^2+ab+bc+ca}$ $= \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{(a+b)+(a+c)}{2}$ <p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi với 2 số dương $3a, bc$ ta có:</p> $\sqrt{3a+bc} \leq \frac{(a+b)+(a+c)}{2} \quad (1)$ | 0,25 |
| | <p>Tương tự ta có :</p> $\sqrt{3b+ca} \leq \frac{(a+b)+(b+c)}{2} \quad (2)$ $\sqrt{3c+ab} \leq \frac{(a+c)+(b+c)}{2} \quad (3)$ <p>Cộng (1) (2) (3) vế theo vế $\Rightarrow Q \leq 2(a+b+c) = 6$</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$</p> $Q_{\text{Max}} = 6 \Leftrightarrow a=b=c=1$ | 0,25 |

Lưu ý: Học sinh có cách làm khác đúng vẫn cho điểm.