SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn thi: Toán (chuyên)
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 16/04/2023
Đề thi có: 01 trang gồm 05 câu

Câu 1. (*2.0 điểm*)

a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 - 3xy = 10$ và $y^2 + xy = 6$. Tính $A = x + 3y$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz(x+y+z) = 1$.

Chứng minh $\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)} = (x+y)(y+z)(z+x)$.

Câu 2. (*2.0 điểm*)

a) Giải phương trình $2(3x+1) + \frac{7}{x} = 5\sqrt{2x+7}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 + 3x - 6y - 4 = 0 \\ x^2 - 3x - 2y + \sqrt{3x+y+5} = 0 \end{cases}$.

Câu 3. (*2.0 điểm*)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5 + 2024x = 5^y + 1$.

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2 + 1 = y^2$. Chứng minh $2y + 2$ là số chính phương.

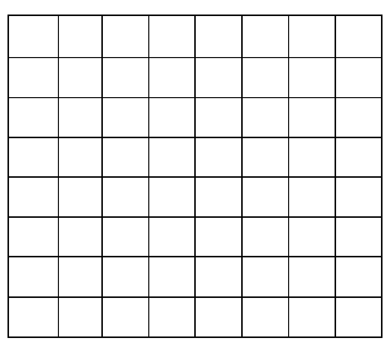
Câu 4. (*3.0 điểm*) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt (O) tại Q $(Q \neq A)$. Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB $(E \in AC, F \in AB)$. Gọi M là trung điểm của BC, tia QM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P.

a) Chứng minh $QM.QP = QD.QA$.

b) Gọi N là giao điểm của PD và EF. Chứng minh MN song song với AD.

c) Dựng đường kính AK của (O). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại điểm R $(R \neq N)$. Chứng minh các điểm P, D, R thẳng hàng.

Câu 5. (*1.0 điểm*) Xét một bảng ô vuông cỡ 8×8 gồm 64 ô vuông. Chứng minh với mọi cách đánh dấu 7 ô vuông của bảng, ta luôn tìm được một hình chữ nhật gồm 8 ô vuông mà không có ô nào bị đánh dấu.



…………………. *Hết* ………………….

Họ và tên thí sinh:..Số báo danh:..
Chữ ký giám thị 1:……………………………..Chữ ký giám thị 2:……………..............

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn thi: Toán (chuyên)
Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 16/04/2023
Đáp án có: 06 trang.

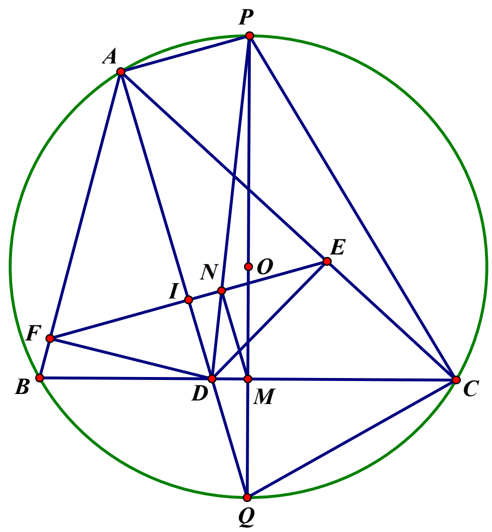
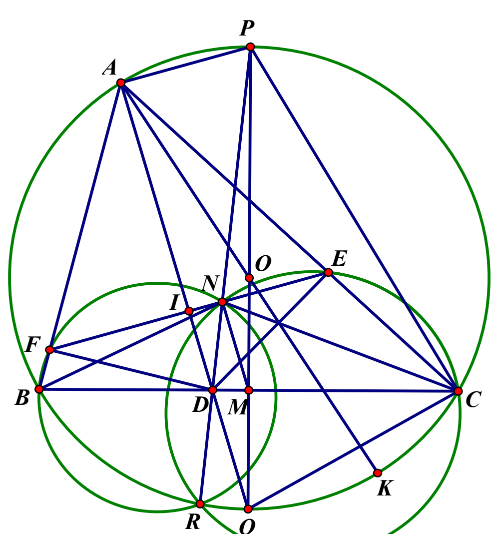
Chú ý: *Hướng dẫn chấm này chỉ thực hiện cho lời giải như trên, nếu thí sinh làm bài theo cách khác thì tổ chấm thống nhất phương án chấm thi cho phù hợp và vẫn cho điểm tối đa nếu cách giải đú.*

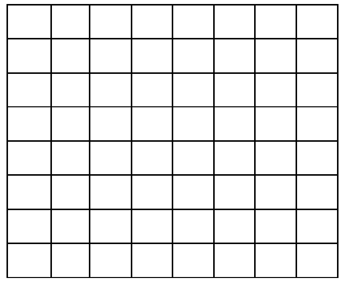
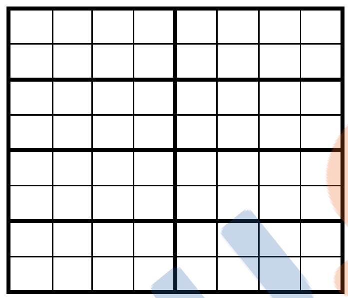
Câu	Nội dung	Điểm
1 **(2 *điểm*)**	**Câu 1.** **a) Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $x^2-3xy=10$ và $y^2+xy=6$. Tính $A=x+3y$.**	**1,0**
	Hướng dẫn: Từ giả thiết: $x^2-3xy=10$ và $y^2+xy=6$ Cho ta: $x^2-3xy+9\left(y^2+xy\right)=64$. $\Leftrightarrow x^2+6xy+9y^2=64 \Leftrightarrow (x+3y)^2=64$ Mà $x,y>0$ nên $A=x+3y=8$.	**1,0**
	b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz(x+y+z)=1$. Chứng minh $$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$	**1,0**
	Hướng dẫn: Ta có: $x^2+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{x^2y^2+1}{y^2}$ $=\dfrac{x^2y^2+xyz(x+y+z)}{y^2}$ (do giả thiết $xyz(x+y+z)=1$) $=\dfrac{xy\left[xy+z(x+y+z)\right]}{y^2}=\dfrac{x(z+x)(z+y)}{y}$	**0,5**
	Biến đổi tương tự ta cũng có được: $y^2+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{y(x+y)(x+z)}{z}$ $z^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{z(y+z)(y+x)}{x}$. Vậy $\sqrt{\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{\dfrac{x(z+x)(z+y)}{y}.\dfrac{y(x+y)(x+z)}{z}.\dfrac{z(y+z)(y+x)}{x}}$ $=(x+y)(y+z)(z+x)$.	**0,5**

2 **(2 *điểm*)**	**Câu 2.** **a) Giải phương trình** $2(3x+1)+\frac{7}{x}=5\sqrt{2x+7}$ **.**	**1,0**
	Hướng dẫn: Điều kiện: $x\geq\frac{-7}{2};x\neq 0$. (*) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 6x^2+2x+7=5x\sqrt{2x+7}$ (1) Đặt $u=\sqrt{2x+7}$.	**0,25**
	Từ (1) cho ta: $6x^2-5ux+u^2=0$ $\Leftrightarrow (2x-u)(3x-u)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=2x\\u=3x\end{array}\right.$.	**0,25**
	Trường hợp 1: $u=2x\Leftrightarrow\sqrt{2x+7}=2x$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\4x^2-2x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{29}}{4}$ (thỏa mãn (*))	**0,25**
	Trường hợp 2: $u=3x\Leftrightarrow\sqrt{2x+7}=3x$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\9x^2-2x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn (*)) Vậy tập nghiệm của phương trình: $S=\left\{\frac{1+\sqrt{29}}{4};1\right\}$	**0,25**
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3-3y^2+3x-6y-4=0 & (1)\\x^2-3x-2y+\sqrt{3x+y+5}=0 & (2)\end{cases}$**.**	**1,0**
	Biến đổi phương trình (1), ta có : $x^3+3x=y^3+3y^2+6y+4\Leftrightarrow x^3+3x=(y+1)^3+3(y+1)$. (3) Đặt $u=y+1$, thay vào (3) ta có được : $x^3+3x=u^3+3u$ $\Leftrightarrow(x-u)(x^2+ux+u^2+3)=0$ (4) Nhận thấy : $x^2+ux+u^2+3=\left(x+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3u^3}{4}+3>0$ với $\forall x,u\in\mathbb{R}$. Do đó từ (4) cho ta : $x=u=y+1\Rightarrow y=1-x$.	**0,5**
	Thay vào phương trình (1), ta có: $x^2-5x+2+2\sqrt{x+1}=0$ (điều kiện: $x\geq -1$)	**0,25**

	$\Leftrightarrow x^2-4x+4=(x+1)-2\sqrt{x+1}+1$ $\Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{x+1}-1 \\ x-2=1-\sqrt{x+1} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{x+1} \\ 3-x=\sqrt{x+1} \end{array}\right.$	
	Trường hợp 1: $x-1=\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x=0 \end{cases}.$ $\Leftrightarrow x=3, y=2$. (thỏa mãn các điều kiện) *Trường hợp 2:* $3-x=\sqrt{x+1}$. $\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x^2-7x+8=0 \end{cases}.$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}, y=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$. (thỏa mãn các điều kiện) Vậy tập nghiệm của hệ phương trình $S=\left\{(3;2),\left(\dfrac{7-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$.	**0,25**
3 **(2 *điểm*)**	**Câu 3:** **a) Giải phương trình nghiệm nguyên** $x^5+2024x=5^y+1$. **(*)**	**1,0**
	Hướng dẫn: + Nhận xét: mọi số nguyên x thì ta luôn có: x^5-x luôn chia hết cho 5. Thật vậy: Ta có $x^5-x=x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$ $=x(x-1)(x+1)\left(x^2-4+5\right)$ $=x(x-1)(x+1)\left(x^2-4\right)+5x(x-1)(x+1)$ $=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5x(x-1)(x+1)$ Nhận thấy $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên luôn chia hết cho 5. Do đó x^5-x luôn chia hết cho 5.	**0,5**
	+ Cũng chú ý: Từ (*) thì vế trái nguyên nên vế phải nguyên, do đó $y\in\mathbb{N}$ Lúc này với $\forall y\in\mathbb{N}$ thì 5^y+1 chia 5 có các số dư chỉ có thể là 2 hoặc 1 hay 5^y+1 không chia hết cho 5 với mọi số nguyên y. + Trở lại bài toán: $x^5+2024x=5^y+1$ $\Leftrightarrow x^5-x+2025x=5^y+1$. (**) Theo nhận xét trên thì vế trái của (**) chia hết cho 5, vế phải của (**) không chia hết cho 5 nên phương trình (**) vô nghiệm, hay phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.	**0,5**

	b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2+1=y^2$. Chứng minh $2y+2$ là số chính phương.	**1,0**
	Hướng dẫn: Dễ thấy y lẻ nên ta đặt $y=2k+1\left(k\in\mathbb{N}\right)$. Thay vào giả thiết, ta có được: $44x^2+1=\left(2k+1\right)^2 \Rightarrow 11x^2=k\left(k+1\right)$. (*) $\Rightarrow k\left(k+1\right)\vdots 11$ Do 11 là số nguyên tố nên hoặc $k\vdots 11$ hoặc $k+1\vdots 11$.	**0,25**
	Trường hợp 1: $k\vdots 11$. Đặt $k=11.m$ $\left(m\in\mathbb{N}\right)$. Thay vào (*), ta có: $x^2=m\left(11m+1\right)$. Lại có: $\left(m;11m+1\right)=1\Rightarrow m$ và $11m+1$ đều là các số chính phương. Vậy $\begin{cases} m=a^2 \\ 11m+1=b^2 \end{cases}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N};b>0$. Lúc này: $2y+2=4k+4=44m+4=4b^2$ là số chính phương.	**0,25**
	Trường hợp 2 : $\left(k+1\right)\vdots 11$. Đặt $k+1=11.n$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Thay vào (*), ta có: $x^2=n\left(11n-1\right)$. Lại có: $\left(n;11n-1\right)=1\Rightarrow n$ và $11n-1$ đều là các số chính phương. Vậy $\begin{cases} n=c^2 \\ 11n-1=d^2 \end{cases}$ trong đó $c,d\in\mathbb{N}^*$. Từ đó cho ta $11c^2-d^2=1$ hay $12c^2=c^2+d^2+1$ (**) Nhận thấy vế trái của (**) chia hết cho 4, vế phải chia 4 chỉ có thể có các số dư là $1;2$ hoặc 3 nên không thể xảy ra. Vậy nếu các số nguyên dương x,y thỏa mãn $44x^2+1=y^2$ thì $2y+2$ là số chính phương.	**0,5**
4 **(3 điểm)**	**Câu 4: Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt $\left(O\right)$ tại Q $\left(Q\neq A\right)$. Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB $\left(E\in AC, F\in AB\right)$. Gọi M là trung điểm của BC, tia QM cắt $\left(O\right)$ tại giao điểm thứ hai là P.** **a) Chứng minh $QM.QP=QD.QA$.** **b) Gọi N là giao điểm của PD và EF. Chứng minh MN song song với AD.** **c) Dựng đường kính AK của $\left(O\right)$. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại điểm $R\left(R\neq N\right)$. Chứng minh các điểm P, D, R thẳng hàng.**	**3,0**

	Hướng dẫn:  	
	a) Theo tính chất đường tròn ta có được: $\widehat{QMD}=\widehat{QAP}=90^0$. Do đó $\Delta QMD \sim \Delta QAP(g.g) \Rightarrow \frac{QM}{QD}=\frac{QA}{QP} \Rightarrow QM.QP=QA.QD$.	**1,0**
	b) Gọi I là giao điểm của AD và EF. Ta có: $\Delta AED \sim \Delta PCD(g.g)$, có các đường cao tương ứng là EI và CM nên $\frac{QM}{QP}=\frac{DI}{DA}$. Mặt khác do $NI//AP \Rightarrow \frac{DI}{DA}=\frac{DN}{DP}$. Vậy $\frac{QM}{QP}=\frac{DI}{DA}=\frac{DN}{DP}$. Theo đảo của Talet, cho ta $MN//AD$.	**1,0**
	c)  	

	Gọi R là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN. Trước hết, ta chứng minh $R \in (O)$. Ta có: $\widehat{BRC} = \widehat{BRN} + \widehat{CRN} = \widehat{AEF} + \widehat{AFE} = 180^0 - \widehat{BAC}$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp nên $R \in (O)$. Lúc này: $\widehat{NRC} = \widehat{NEA} = \widehat{EAP} = \widehat{PRC}$. Do đó P, D, R thẳng hàng.	**1,0**
5 (1 điểm)	**Câu 5: Xét một bảng ô vuông cỡ 8×8 gồm 64 ô vuông. Chứng minh với mọi cách đánh dấu 7 ô vuông của bảng, ta luôn tìm được một hình chữ nhật gồm 8 ô vuông mà không có ô nào bị đánh dấu.** 	**1,0**
	Hướng dẫn:  Ta chia bảng vuông đã cho thành 8 bảng hình chữ nhật cỡ 2×4 như hình vẽ. Theo đề bài ta chỉ đánh dấu đúng 7 ô vuông của bảng nên theo nguyên lí Đirichle, luôn tồn tại ít nhất một bảng con trong số 8 bảng trên không chứa ô nào bị đánh dấu, do đó ta có được điều phải chứng minh.	**1,0**

………………*Hết*……………….