SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN (*dành cho tất cả thí sinh*)
Thời gian làm bài: 120 phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: 16/4/2023
Đề thi có: 01 trang gồm 05 câu

Câu I. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $A=\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$, với $0<x\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tính giá trị của biểu thức $B=A\left(\sqrt{2023}+2\right)$ khi $x=2024-2\sqrt{2023}$.

Câu II. *(2,0 điểm)*

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $(d): y=ax+b$ đi qua điểm $M\left(1;2\right)$ và song song với đường thẳng $(d'): y=2x+3$. Tìm các hệ số a và b.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{5}{y}=3\\ \frac{9}{x}-\frac{10}{y}=1\end{cases}$.

Câu III. *(2,0 điểm)* Cho phương trình bậc hai $x^2-3x+m^2=0$, với m là tham số.

1. Giải phương trình khi $m=\sqrt{2}$.

2. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện

$$\left|x_1^2+x_1x_2+3x_2-m^2-2m-1\right|>6-m^2.$$

Câu IV. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai đường cao của tam giác đó là AD, BE cắt nhau tại H với $D\in BC, E\in AC$.

1. Chứng minh $CDHE$ là tứ giác nội tiếp một đường tròn, tìm vị trí tâm I của đường tròn đó.

2. Chứng minh $HA.HD=HB.HE$.

3. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE (với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$).

Câu V. *(1,0 điểm)* Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{bc}+\frac{2b}{ca}+\frac{5c}{ab}$.

……………… Hết ………………

Họ và tên thí sinh:………………………………… Số báo danh:………………………
Chữ ký giám thị 1:…………………………………Chữ ký giám thị 2:………………………

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN (*dành cho tất cả thí sinh*)
Thời gian làm bài: 120 phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: 16/4/2023
Đáp án đề thi có: 03 trang

Câu I. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$, với $0<x\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của biểu thức $B=A\left(\sqrt{2023}+2\right)$ khi $x=2024-2\sqrt{2023}$.

Giải.

1. *(1,0 điểm)* Khi $0<x\neq 1$ ta có $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}$ *(0,5 điểm)*

$=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.\dfrac{\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$. Vậy $A=\sqrt{x}-1$ *(0,5 điểm)*

2. *(1,0 điểm)* Theo ý 1 thì $A=\sqrt{x}-1$. Khi $x=2024-2\sqrt{2023}$ ta có

$A=\sqrt{2024-2\sqrt{2023}}-1=\sqrt{\left(\sqrt{2023}-1\right)^2}-1=\sqrt{2023}-2$ *(0,5 điểm)*

từ đó suy ra $B=\left(\sqrt{2023}-2\right)\left(\sqrt{2023}+2\right)=2019$ *(0,5 điểm)*

Câu II. *(2,0 điểm)*

1. *(1,0 điểm)* Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $(d): y=ax+b$ đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $(d'): y=2x+3$. Tìm các hệ số a và b.

Giải.

Đường thẳng $(d): y=ax+b$ song song với đường thẳng $(d'): y=2x+3$ nên $a=2$ và $b\neq 3$.
(0,5 điểm)

Vì đường thẳng $(d): y=ax+b$ đi qua điểm $M(1;2)$ nên ta có $2=2.1+b\Leftrightarrow b=0$
(thỏa mãn vì $b\neq 3$). Vậy $a=2, b=0$ là các giá trị cần tìm. *(0,5 điểm)*

2. *(1,0 điểm)* Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=3\\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{10}{y}=1\end{cases}$.

Giải. Đặt ẩn phụ $u=\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{y}$.

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases}6u+5v=3\\ 9u-10v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12u+10v=6\\ 9u-10v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{1}{3}\\ v=\dfrac{1}{5}\end{cases}$. *(0,5 điểm)*

Thay ngược trở lại ta được $\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(3;5)$. *(0,5 điểm)*

Câu III. *(2,0 điểm)* Cho phương trình bậc hai $x^2-3x+m^2=0$, với m là tham số.

1. Giải phương trình khi $m=\sqrt{2}$.

2. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn điều kiện

$$\left|x_1^2+x_1x_2+3x_2-m^2-2m-1\right|>6-m^2.$$

Giải.

1. *(1,0 điểm)* Khi $m=\sqrt{2}$ ta có phương trình $x^2-3x+2=0$. *(0,5 điểm)*

Do $a+b+c=0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1=1,\ x_2=2$. *(0,5 điểm)*

2. *(1,0 điểm)* Phương trình có hai nghiệm $x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow 9-4m^2\ge 0$

$\Leftrightarrow m^2\le \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}\le m\le \dfrac{3}{2}$ (*) *(0,25 điểm)*

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=m^2 \end{cases}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $x^2-3x+m^2=0$ nên ta có $x_1^2-3x_1+m^2=0 \Rightarrow x_1^2=3x_1-m^2$

Khi đó với $-\dfrac{3}{2}\le m\le \dfrac{3}{2}$ thì

$\left|x_1^2+x_1x_2+3x_2-m^2-2m-1\right|>6-m^2 \Leftrightarrow \left|3x_1-m^2+x_1x_2+3x_2-m^2-2m-1\right|>6-m^2$

$\left|3(x_1+x_2)+x_1x_2-2m^2-2m-1\right|>6-m^2 \Leftrightarrow \left|9+m^2-2m^2-2m-1\right|>6-m^2$

$\left|-m^2-2m+8\right|>6-m^2 \Leftrightarrow \left|(m+4)(2-m)\right|>6-m^2$ *(0,25 điểm)*

$\Leftrightarrow \left|(m+4)\right|\left|(2-m)\right|>6-m^2 \Leftrightarrow (m+4)(2-m)>6-m^2$

$\Leftrightarrow -m^2-2m+8>6-m^2 \Leftrightarrow m<1$ *(0,25 điểm)*

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $-\dfrac{3}{2}\le m<1$. *(0,25 điểm)*

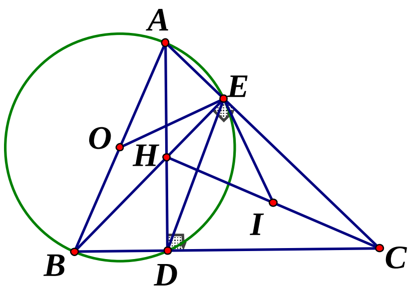
Câu IV. *(3,0 điểm)* Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai đường cao của tam giác đó là AD, BE cắt nhau tại H với $D\in BC, E\in AC$.

1. Chứng minh $CDHE$ là tứ giác nội tiếp một đường tròn, tìm vị trí tâm I của đường tròn đó.

2. Chứng minh $HA.HD=HB.HE$;

3. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE (với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$).

Giải.



1. *(1,0 điểm)* Chứng minh tứ giác $CDHE$ nội tiếp

Ta có: AD, BE là hai đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} AD\perp BC \\ BE\perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{BEC}=90^0$ *(0,5 điểm)*

Xét tứ giác $CDHE$ ta có $\widehat{HDC}+\widehat{HEC}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow CDHE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính HC. *(0,25 điểm)*

Như vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDHE$ là trung điểm của HC. *(0,25 điểm)*

2. *(1,0 điểm)* Chứng minh $HA.HD = HB.HE$

Xét ΔAHE và ΔBHD ta có:

$\widehat{AHE} = \widehat{BHD}$ (đối đỉnh); $\widehat{AEH} = \widehat{BDH} = 90^0$ nên ΔAHE đồng dạng với ΔBHD *(0,5 điểm)*

$\Rightarrow \dfrac{HA}{HB} = \dfrac{HE}{HD} \Rightarrow HA.HD = HB.HE$ (ĐPCM) *(0,5 điểm)*

3. *(1,0 điểm)* Xét tứ giác $ABDE$ ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^0$, mà hai đỉnh D, E là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác nên $ABDE$ là tứ giác nội tiếp. Lại có ΔAEB vuông tại E nên A, B, D, E cùng thuộc đường tròn tâm O đường kính AB và cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. *(0,25 điểm)*

Ta có $ABDE$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{BAE}$ (1)

ΔECH vuông tại E có đường trung tuyến $EI \Rightarrow EI = HI = \dfrac{1}{2}HC$

$\Rightarrow \Delta HEI$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ hay $\widehat{IEH} = \widehat{EHC}$ (2) *(0,25 điểm)*

Tứ giác $CDHE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CHE}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{BAE} = \widehat{HEI}$;

ΔBOE cân tại O $(OB = OE) \Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OBE}$ *(0,25 điểm)*

Hay $\widehat{BAE} = \widehat{OEA}$ mà $\widehat{OBE} + \widehat{BAE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OEB} + \widehat{HEI} = 90^0 \Rightarrow OE \perp EI$

$\Rightarrow EI$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE (ĐPCM). *(0,25 điểm)*

Câu V. *(1,0 điểm)* Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{bc} + \frac{2b}{ca} + \frac{5c}{ab}.$$

Giải. Đặt $\dfrac{bc}{a} = \dfrac{3}{x}, \dfrac{ca}{b} = \dfrac{3}{y}, \dfrac{ab}{c} = \dfrac{3}{z}$ khi đó $x, y, z > 0;\ 9\left(\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}\right) = a^2 + b^2 + c^2 = 9$

$\Rightarrow x + y + z = xyz \Rightarrow z = \dfrac{x+y}{xy-1}$ *(0,25 điểm)*

$$P = \frac{1}{3}(x + 2y + 5z) \Rightarrow 3P = x + 2y + 5z = x + 2y + \frac{5(x+y)}{xy-1}$$

$$= x + \frac{2}{x} + \frac{5}{x} + \left(2y - \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{5(x+y)}{xy-1} - \frac{5}{x}\right) = x + \frac{7}{x} + \frac{2(xy-1)}{x} + \frac{5(x^2+1)}{x(xy-1)}$$ *(0,25 điểm)*

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có:

$$3P \ge x + \frac{7}{x} + 2\sqrt{\frac{2(xy-1)}{x} \cdot \frac{5(x^2+1)}{x(xy-1)}} = x + \frac{7}{x} + 2\sqrt{10\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = x + \frac{7}{x} + 2\sqrt{(3^2+1^2)\cdot\left(1^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \ge (ac + bd)^2$ và bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có:

$$3P \ge x + \frac{7}{x} + 2\left(3 + \frac{1}{x}\right) = x + \frac{9}{x} + 6 \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} + 6 = 12 \Rightarrow P \ge 4.$$ *(0,25 điểm)*

Khi $x = 3, y = 2, z = 1$ tức là $a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{3}, c = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ thì $P = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4. *(0,25 điểm)*

……………… Hết ………………