

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN 9  
Ngày kiểm tra: 11/4/2023  
Thời gian làm bài: 90 phút

**Bài I (2,0 điểm)**

Cho các biểu thức  $P = \frac{3x+12}{\sqrt{x}+3}$  và  $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{x-9}$  Với  $x > 0, x \neq 9$

- 1) Tính giá trị của biểu thức P khi  $x = 4$
- 2) Chứng minh  $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{P}{Q}$

**Bài II (2,0 điểm)**

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một công ty phải sản xuất 1000 chiếc áo trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, mỗi ngày công ty đã làm thêm được 10 sản phẩm so với kế hoạch. Vì vậy công ty đã làm vượt mức kế hoạch 80 sản phẩm và hoàn thành công việc sớm hơn 2 ngày so với qui định. Tính số áo mà công ty phải làm trong một ngày theo kế hoạch.

2) Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao 1,6m và bán kính đáy 0,5m. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy  $\pi \approx 3,14$ ).

**Bài III (2,5 điểm)**

1) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{y-5} = 3 \\ 2\sqrt{x} - \frac{3}{y-5} = 1 \end{cases}$$

2) Cho phương trình  $x^2 + mx - 2 = 0$  (1) (với m là tham số)

a) Giải phương trình với  $m = 1$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 2023$

**Bài IV (3,0 điểm).**

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

1) Chứng minh: Tứ giác AEHF nội tiếp.

2) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O), gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên AK. Chứng minh  $AB.AC = AD.AK$  và  $MD \parallel BK$ .

3) Giả sử BC là dây cố định của đường tròn (O) còn A di động trên cung lớn BC. Tìm vị trí của điểm A để diện tích tam giác AEH lớn nhất

**Bài V (0,5 điểm).** Cho a, b > 0 thỏa mãn  $a+b \leq 2$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(a+1)}$

----- Hết -----

Lưu ý: Cán bộ coi kiểm tra không giải thích gì thêm.

Họ và tên học sinh..... Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Môn: TOÁN 9

BÀI/Y	NỘI DUNG	ĐIỂM
I.1 0,5 điểm	1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$	0,5
	$x = 4$ thỏa mãn điều kiện $x > 0, x \neq 9$ . Thay $x = 4$ vào biểu thức P ta có:	0,25
	$P = \frac{3.4+12}{\sqrt{4}+3} = \frac{24}{5}$ Vậy: với $x = 4$ ta có $P = \frac{24}{5}$	0,25
I.2 1,0 điểm	2) Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	1,0
	$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{x-9}$	0,25
	$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{7\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$	0,25
	$= \frac{x+3\sqrt{x}+\sqrt{x}+3+2x-6\sqrt{x}-7\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$	0,25
	$= \frac{3x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$	0,25
	$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	0,25
	Vậy với $x > 0, x \neq 9$ , ta có $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	
I.3 0,5 điểm	3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = P.Q$	0,5
	Với $x > 0, x \neq 9$ , ta có	0,25
	$A = \frac{P}{Q} = \frac{3x+12}{\sqrt{x}+3} : \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+4}{\sqrt{x}}$ $A = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số không âm ta có: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 4$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4(tm)$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4$ tại $x = 4$	0,25
II.1	1) Một công ty phải sản xuất 1000 chiếc áo trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, mỗi ngày công ty đã làm thêm được 10	

1,5 điểm	sản phẩm so với kế hoạch. Vì vậy công ty đã làm vượt mức kế hoạch 80 sản phẩm và hoàn thành công việc sớm hơn 2 ngày so với qui định. Tính số áo mà công ty phải làm trong một ngày theo kế hoạch.	1,5
	Gọi số áo công ty dự định làm trong một ngày theo kế hoạch là $x$ ( $x \in \mathbb{N}^*$ ; đơn vị: áo)	0,25
	Thời gian dự kiến hoàn thành là $\frac{1000}{x}$ (ngày)	0,25
	Tổng số áo làm được thực tế là: 1080 (áo) Thực tế mỗi ngày làm được: $x+10$ (áo)	
	Thời gian hoàn thành thực tế là: $\frac{1080}{x+10}$ (ngày)	0,25
	Thực tế công ty hoàn thành công việc sớm 2 ngày, ta có phương trình: $\frac{1000}{x} - \frac{1080}{x+10} = 2$	0,25
	$\Rightarrow x^2 + 50x - 5000 = 0$ Giải phương trình ta có: $x = -100$ (không thỏa mãn điều kiện) $x = 50$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25
	Vậy mỗi ngày công ty dự định làm 50 áo.	0,25
II.2 0,5 điểm	2) Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao 1,6m và bán kính đáy 0,5m. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi \approx 3,14$ ).	0,5
	Diện tích bề mặt được sơn là diện tích xung quanh của thùng nước: $S = 2\pi Rh \approx 2 \times 3,14 \times 0,5 \times 1,6$	0,25
	$= 5,024$ ( $m^2$ ).	
	Vậy diện tích cần sơn là xấp xỉ $5,024$ ( $m^2$ ).	0,25
	1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{y-5} = 3 \\ 2\sqrt{x} - \frac{3}{y-5} = 1 \end{cases}$	1,0
	$\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{1}{y-5} = 3 \\ 2\sqrt{x} - \frac{3}{y-5} = 1 \end{cases} \quad \text{ĐK: } x \geq 0; y \neq 5$	0,25
III.1 1,0 điểm	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} + \frac{2}{y-5} = 6 \\ 2\sqrt{x} - \frac{3}{y-5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{y-5} = 5 \\ 2\sqrt{x} - \frac{3}{y-5} = 1 \end{cases}$	0,25
	$\begin{cases} y-5 = 1 \\ 2\sqrt{x} - \frac{3}{y-5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ 2\sqrt{x} = 4 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(TM) \\ y = 6(TM) \end{cases}$	0,25
	Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (4; 6)$	
III.2a 0,75 điểm	Cho phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ (1) (với $m$ là tham số)	0,75
	a) Giải phương trình với $m = 1$	
	a. Thay $m = 1$ vào phương trình (1) ta được: $x^2 + x - 2 = 0$	0,25
	Có $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -2$	0,5

	Kết luận	
III.2b 0,75 điểm	b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = 2023$	0,75
	b. $x^2 + mx - 2 = 0$ (1) Chứng minh $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi m. $\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m. Theo định lí Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$	0,25
	$x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = 2023 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1 + x_2) = 2023$ Tìm được $2m = 2023 \Leftrightarrow m = \frac{2023}{2}$ và kết luận	0,5
Bài IV (3,0 điểm)		0,25
1 1,0 điểm	1) Chứng minh: Tứ giác AEHF nội tiếp.	0,75
	Xét tứ giác AEHF có góc $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$	0,25
	$\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$	0,25
	Hai góc này ở vị trí đối nhau $\rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp.	0,25
2 1,5 điểm	2) Chứng minh $AB.AC = AD.AK$ và $MD \parallel BK$ .	1,5
	Đường tròn O có góc $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ nội tiếp chắn cung AC	0,5
	Đường tròn O có AK là đường kính nên $\widehat{ACK} = \widehat{ADB} = 90^\circ$	
	Vậy tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC	0,5
	Từ đó suy ra $\frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AK$	
	Tứ giác ADMC nội tiếp do có $\widehat{ADC} = \widehat{AMC} = 90^\circ$	0,25
Suy ra góc nội tiếp $\widehat{CDM} = \widehat{CAM} = \widehat{CAK}$		
Đường tròn O có $\widehat{CAK} = \widehat{CBK}$ suy ra $\widehat{CBK} = \widehat{CDM}$ và $BK \parallel DM$		
3 0,5 điểm	3) Giả sử BC là dây cố định của đường tròn (O) còn A di động trên cung lớn BC. Tìm vị trí của điểm A để diện tích tam giác AEH lớn nhất	0,5
	Gọi G là giao điểm của HK và BC. Do BHCK là hình bình hành nên G là trung điểm của HK nên G cố định. tam giác AHK có OG là đường trung bình nên $AH = 2OG$ , OG không đổi nên độ dài AH không đổi	0,25

	$S_{AEH} = \frac{AE \cdot EH}{2} \leq \frac{AE^2 + EH^2}{4} = \frac{AH^2}{4}$ $\max S_{AEH} = \frac{AH^2}{4}$ $S_{AEH} \max \Leftrightarrow EA = EH$ $\Leftrightarrow \widehat{HAE} = 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ$	0,25
	<p><b>Bài V</b> (0,5điểm). Cho a, b &gt; 0 thỏa mãn <math>a + b \leq 2</math>. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức <math>P = \sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(a+1)}</math></p>	0,5
V 0,5 điểm	<p>Có <math>\sqrt{2}P = \sqrt{2a(b+1)} + \sqrt{2b(a+1)}</math>          Áp dụng BĐT Cô si cho hai số không âm  <math>\sqrt{2a(b+1)} \leq \frac{2a+b+1}{2}</math>; <math>\sqrt{2b(a+1)} \leq \frac{2b+a+1}{2}</math>  <math>\Rightarrow \sqrt{2}P \leq \frac{3(a+b)+2}{2} \leq \frac{3 \cdot 2 + 2}{2} = 4</math>  <math>\Rightarrow P \leq 2\sqrt{2}</math></p>	0,25
	<p>Dấu "=" xảy ra <math>\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b + 1 \\ 2b = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1</math>          Vậy P có GTLN là <math>2\sqrt{2}</math> khi <math>a = b = 1</math></p>	0,25

**Lưu ý:**

- Học sinh làm theo cách khác đúng, cho điểm tối đa.
- Bài hình: học sinh vẽ sai hình từ câu nào, cho 0 điểm từ câu đó.