

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 12/3/2023

Đề gồm có 01 trang

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (4,0 điểm)

1. Tính giá trị của các biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}};$$

$$\text{b) } B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \left(1 - \frac{1}{2023}\right).$$

2. Cho đa thức $R(x) = x^2 - 2x$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}.$$

Câu II. (4,0 điểm)

1. Tìm x, y, z biết $\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{1}{x+y+z-2}$ (với giả thiết

các tỉ số đều có nghĩa).

2. Một đơn vị công nhân sửa đường dự định phân chia số mét đường phải sửa cho 3 tổ: Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỷ lệ 4 : 5 : 6. Nhưng sau đó, vì số người thay đổi nên đơn vị đã chia lại số mét đường phải sửa cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỷ lệ 3 : 4 : 5. Do đó, có một tổ làm ít hơn dự định là 20m đường. Tính số mét đường đơn vị đã chia lại cho mỗi tổ.

Câu III. (4,0 điểm)

1. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$\left| (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y.$$

Câu IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân có đáy là BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Kẻ NH vuông góc với CM tại H. Kẻ HE vuông góc với AB tại E. Kẻ AK vuông góc với CM tại K. Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q.

1. Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA.

2. Chứng minh tam giác ABH cân và HM là tia phân giác của góc BHE.

3. Gọi I là điểm di động trên tia CA, J là điểm di động trên tia CB. Xác định vị trí các điểm I, J sao cho tam giác HJI có chu vi bé nhất.

Câu V. (2,0 điểm) Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$.

----- Hết -----

Họ và tên thi sinh..... Số báo danh

Câu	Nội dung	Điểm
I	<p>1. Tính giá trị của các biểu thức:</p> <p>a) $A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5}}$; $B = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022}\right)\left(1 - \frac{1}{2023}\right)$.</p>	2,0
	<p>a) $A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}$</p>	0,5
	<p>$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$</p>	0,25
	<p>$= \frac{4}{5}$</p>	0,25
	<p>b) $B = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2022}\right)\left(1 - \frac{1}{2023}\right)$</p>	0,5
	<p>$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2022}{2023}$</p>	
	<p>$= \frac{1}{2023}$. Vậy $B = \frac{1}{2023}$</p>	0,5
	<p>2. Cho đa thức $R(x) = x^2 - 2x$. Tính giá trị của biểu thức</p>	2,0
	<p>$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$</p>	0,5
	<p>Ta có $R(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$. Do đó:</p> <p>$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$</p> <p>$= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2021 \cdot 2023} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$</p>	
<p>$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{2021 \cdot 2023} \right) + \frac{1}{2 \cdot 2023}$</p>	0,5	
<p>$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \right) + \frac{1}{2 \cdot 2023}$</p>		
<p>$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \right) + \frac{1}{2 \cdot 2023}$</p>	0,5	
<p>$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1516}{1011} = \frac{758}{1011}$</p>	0,5	

II	1. Tìm x, y, z, biết : $\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{1}{x+y+z-2}$. (Với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)	2,0
	Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{2(x+y+z-2)}{x+y+z-2} = 2$	0,5
	Mà: $\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{1}{x+y+z-2}$ Nên $\frac{1}{x+y+z-2} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = 2,5$ (1)	0,25
	Ta có: $\frac{y+z-2}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{y+z-2}{x+1} + 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{x+y+z-1}{x+1} = 3$ (2) Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{1,5}{x+1} = 3 \Leftrightarrow x = -0,5$	0,25
	$\frac{z+x+1}{y-1} = 2 \Leftrightarrow \frac{z+x+1}{y-1} + 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{y-1} = 3$ (3) Từ (1) và (3) ta suy ra $\frac{2,5}{y-1} = 3 \Leftrightarrow y = \frac{11}{6}$	0,25
	$\frac{x+y-3}{z-2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+y-3}{z-2} + 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{x+y+z-5}{z-2} = 3$ (4) Từ (1) và (4) ta suy ra $\frac{-2,5}{z-2} = 3 \Leftrightarrow z = \frac{7}{6}$	0,25
	Vậy $x = -0,5; y = \frac{11}{6}; z = \frac{7}{6}$.	0,5
2. Một đơn vị công nhân sửa đường dự định phân chia số mét đường phải sửa cho 3 tổ: Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỷ lệ 4 : 5 : 6. Nhưng sau đó, vì số người thay đổi nên đơn vị đã chia lại số mét đường phải sửa cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỷ lệ 3 : 4 : 5. Do đó, có một tổ làm ít hơn dự định ban đầu là 20m đường. Tính số mét đường đơn vị đã chia lại cho mỗi tổ.	2,0	
Gọi tổng số mét đường đơn vị công nhân phải sửa là M (M > 0). Gọi x ₁ , y ₁ , z ₁ lần lượt là số mét đường phải sửa của Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 theo dự định ban đầu. Gọi x ₂ , y ₂ , z ₂ lần lượt là số mét đường phải sửa của Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 khi phân chia lại. Theo bài ra ta có: $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = M$ (1). $\frac{x_1}{4} = \frac{y_1}{5} = \frac{z_1}{6}$ (2); $\frac{x_2}{3} = \frac{y_2}{4} = \frac{z_2}{5}$ (3)	0,5	

	Từ (1), (2), (3), áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x_1}{4} = \frac{y_1}{5} = \frac{z_1}{6} = \frac{x_1 + y_1 + z_1}{15} = \frac{M}{15}$ $\frac{x_2}{3} = \frac{y_2}{4} = \frac{z_2}{5} = \frac{x_2 + y_2 + z_2}{12} = \frac{M}{12}$	0,25
	Suy ra: $x_1 = \frac{4M}{15}, y_1 = \frac{M}{3}, z_1 = \frac{2M}{5}; x_2 = \frac{M}{4}, y_2 = \frac{M}{3}, z_2 = \frac{5M}{12}$	0,25
	So sánh các giá trị này với nhau ta có: $x_2 < x_1, y_2 = y_1, z_2 > z_1$	0,25
	Theo bài ra ta có: $x_1 - x_2 = 20$. Suy ra $\frac{4M}{15} - \frac{M}{4} = 20 \Leftrightarrow M = 1200$.	0,25
	Do đó: $x_2 = 300, y_2 = 400, z_2 = 500$	0,25
	Vậy số mét đường đơn vị đã chia lại cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 lần lượt là 300m, 400m, 500m.	0,25
	1. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p + 1)(p - 1)$ chia hết cho 24.	2,0
	* Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên ta được $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ với k là số tự nhiên khác 0.	0,25
	+ Nếu $p = 3k + 1$ thì $(p + 1)(p - 1) = (3k + 2) \cdot 3k$ chia hết cho 3	0,25
	+ Nếu $p = 3k + 2$ thì $(p + 1)(p - 1) = (3k + 3)(3k + 1)$ chia hết cho 3	0,25
	Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p + 1)(p - 1)$ chia hết cho 3 (1)	0,25
	Mặt khác vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ. Suy ra $p + 1$ và $p - 1$ là hai số chẵn liên tiếp	0,25
	Đặt $p - 1 = 2n$ thì $p + 1 = 2n + 2$, ta có $(p + 1)(p - 1) = 2n(2n + 2) = 4n(n + 1)$	0,25
	Do $n(n + 1)$ chia hết cho 2 nên $4n(n + 1)$ chia hết cho 8. Do đó $(p + 1)(p - 1)$ chia hết cho 8 (2)	0,25
	Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau, $3 \cdot 8 = 24$ nên từ (1) và (2) ta suy ra $(p + 1)(p - 1)$ chia hết cho 24.	0,25
	2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $ (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) = xy + y^2 - 4y.$	2,0
III	$ (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) = xy + y^2 - 4y \quad (1)$	
	Với mọi x, y , ta có $ (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \geq 0$, do đó, từ (1) ta suy ra $xy + y^2 - 4y \geq 0$	0,25
	Suy ra: $(x - y)^2 + 2(y^2 + xy - 4y) \geq 0$	0,25
	Do đó (1) $\Leftrightarrow (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) = xy + y^2 - 4y$	0,25

	$\Leftrightarrow (x - y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ y^2 + xy - 4y = 0 \end{cases} \quad (\forall i (x - y)^2 \geq 0, y^2 + xy - 4y \geq 0)$	0,25
	$\Leftrightarrow x = y = 0$ hoặc $x = y = 2$.	0,5
	Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(0; 0), (2; 2)$.	0,25
IV	<p>Cho tam giác ABC vuông cân có đáy là BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC, Kẻ NH vuông góc với CM tại H. Kẻ HE vuông góc với AB tại E. Kẻ AK vuông góc với CM tại K. Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q.</p> <p>1. Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA.</p> <p>2. Chứng minh tam giác ABH cân và HM là tia phân giác của góc BHE.</p> <p>3. Gọi I là điểm di động trên tia CA, J là điểm di động trên tia CB. Xác định vị trí các điểm I, J sao cho tam giác HJI có chu vi bé nhất.</p>	6,0
	<p>1. Xét hai tam giác vuông MKA và NHC, có:</p> $AM = CN \left(= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC \right)$ $\angle MAK = \angle NHC \text{ (cùng phụ với } \angle AMC)$ <p>Suy ra $\triangle MKA = \triangle NHC$ (cạnh huyền, góc nhọn)</p> $\Rightarrow KA = HC \text{ (hai cạnh tương ứng)} \quad (1)$	0,5
	<p>- Chứng minh được $\triangle AQN = \triangle CHN$ (cạnh huyền, góc nhọn)</p> $\Rightarrow AQ = CH \text{ (hai cạnh tương ứng)} \quad (2)$	0,25
	<p>Từ (1) và (2) ta suy ra $KA = HC = AQ$.</p>	0,25
	<p>- Chứng minh được $\triangle AKH = \triangle AQH$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)</p>	0,25
	<p>Suy ra $\angle AHQ = \angle AHK = 45^\circ$</p> <p>Do đó $\angle AHC = \angle AHQ + \angle QHC = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.</p>	0,25

	<p>Xét $\triangle AHC$ và $\triangle BKA$ có: $AC = AB$; $HC = AK$ $\angle BAK = \angle HCA$ (cùng phụ với $\angle AMC$). Suy ra: $\triangle AHC = \triangle BKA$ (c.g.c)</p>	0,25
	$\Rightarrow \angle BKA = \angle AHC = 135^\circ$.	0,25
	<p>2. Xét $\triangle BKA$ và $\triangle BKH$ có $AK = KH$ (vì tứ giác $AKHQ$ là hình vuông). $\angle BKH = 360^\circ - \angle AKH - \angle AKB = 135^\circ = \angle AKB$. BK là cạnh chung. Suy ra $\triangle BKA = \triangle BKH$ (c.g.c).</p>	0,75
	$\Rightarrow AB = BH$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle AHB$ cân tại B .	0,25
	<p>Ta có: $\angle MHE = \angle HCA$ (2 góc đồng vị, $EH \parallel AC$ vì cùng vuông góc với AB). $\angle HCA = \angle KAB$ ($\triangle AHC = \triangle BKA$) $\angle KAB = \angle KHB$ ($\triangle BKA = \triangle BKH$) Suy ra $\angle MHE = \angle KHB$</p>	0,75
	$\Rightarrow HM$ là tia phân giác của góc BHE .	0,25
	<div style="text-align: center;"> </div> <p>Gọi H_1 là điểm sao cho AC là đường trung trực của HH_1, H_2 là điểm sao cho CB là đường trung trực của HH_2 Ta có H_1, H_2 cố định, độ dài đoạn thẳng H_1H_2 không đổi.</p> <p>Với mọi điểm I trên tia AC, mọi điểm J trên tia CB ta luôn có $IH = IH_1, JH = JH_2$ (AC là đường trung trực của HH_1, CB là đường trung trực của HH_2)</p> <p>Do đó chu vi tam giác HJI là:</p> $\mathcal{C} = IH + JH + IJ = H_1I + IJ + JH_2 \geq H_1H_2 \Rightarrow \mathcal{C} \geq H_1H_2$	0,25
	<p>Với mọi điểm I trên tia AC, mọi điểm J trên tia CB ta luôn có $IH = IH_1, JH = JH_2$ (AC là đường trung trực của HH_1, CB là đường trung trực của HH_2)</p>	0,25
	<p>Do đó chu vi tam giác HJI là:</p> $\mathcal{C} = IH + JH + IJ = H_1I + IJ + JH_2 \geq H_1H_2 \Rightarrow \mathcal{C} \geq H_1H_2$	0,5
	<p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi I là giao điểm của H_1H_2 với AC, J là giao điểm của H_1H_2 với CB (các điểm H_1, I, J, H_2 thẳng hàng).</p>	0,25
	<p>Vậy khi I là giao điểm của H_1H_2 với AC, J là giao điểm của H_1H_2 với</p>	0,25

	CB thì tam giác HJI có chu vi bé nhất.	
	Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$	2,0
V	$A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3}$ <p>*) Với $n > 1$, ta có $0 < (n - 1)n(n + 1) = n^3 - n < n^3$</p> $\Rightarrow \frac{1}{n^3} < \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$ <p>Do đó:</p> $A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024} = B$	0,25
	Ta có $\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right]$ nên	0,25
	$B = \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024}$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2023.2024} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2023.2024}$ $= \frac{1}{40} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2023.2024} < \frac{1}{40}$ <p>Vậy $A < B < \frac{1}{40}$ (1)</p>	0,5

	<p>*) Với $n > 1$, ta có $\frac{1}{n^3} > \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$</p> <p>Do đó: $A > \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{2023.2024.2025}$</p> $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} + \frac{1}{2023.2024} - \frac{1}{2024.2025} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{2024.2025} \right)$	0,5
	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5.6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2024.2025}$ $= \frac{1}{60} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{780} = \frac{13-1}{780} = \frac{1}{65}$	0,25
	<p>Vậy $A > \frac{1}{65}$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.</p>	0,25

Lưu ý:

- Câu IV: Nếu thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai hình thì không chấm điểm.
- Điểm bài thi làm tròn đến 0,25.
- Nếu thí sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.