

ĐỀ THI CHÍNH THỨC  
(Đề thi có 01 trang)

Môn: TOÁN  
Thời gian làm bài thi: 150 phút  
Ngày thi: 23/3/2023

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x+x-\sqrt{x}-1}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{2}{x-1} \right)$  với  $0 \leq x \neq 1$ .

2) So sánh hai số  $M = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$  và  $N = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ .

Câu 2 (3,0 điểm). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

1)  $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)$ ;      2)  $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x-1}} = 2 & (x > 1, y > 0) \\ x + y = \sqrt{2} \end{cases}$

Câu 3 (3,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $2x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 3y + 11 = 0$ .

2) Cho  $a, b, c$  là các số nguyên thỏa mãn  $a + b + c = 4046$ . Chứng minh rằng

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) - 6abc \text{ chia hết cho } 14.$$

Câu 4 (4,0 điểm).

1) Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A$  thuộc parabol  $(P): y = -x^2$  có tung độ  $y_A = -4$ . Tìm tọa độ các điểm  $B$  thuộc  $(P)$  sao cho tam giác  $OAB$  vuông tại  $B$ .

2) Cho các số  $x, y, z$  thỏa mãn  $1 \leq x, y, z \leq 3$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y + z + 1)$ . Chứng minh bất đẳng thức  $11 \leq xy + yz + zx \leq (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5 (5,0 điểm). Cho điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Từ  $M$  vẽ hai tiếp tuyến  $MA, MC$  của đường tròn  $(O)$  ( $A, C$  là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến  $MBD$  của  $(O)$  sao cho  $B$  nằm giữa  $M$  và  $D$ ,  $BC < BD$ .

1) Chứng minh  $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{CD}$  và  $AD \cdot BC = AB \cdot CD$ .

2) Trên đoạn  $BD$  lấy điểm  $F$  sao cho  $\widehat{FAD} = \widehat{BAC}$ . Chứng minh hai tam giác  $ABF, ACD$  đồng dạng và  $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$ .

3) Tiếp tuyến tại  $B$  của đường tròn  $(O)$  cắt  $MC$  tại  $N$  và cắt đường thẳng  $CD$  tại  $P$ ;  $ND$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ . Chứng minh  $A, E, P$  thẳng hàng.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Từ điểm  $A$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  của đường tròn  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến  $AED$  ( $E$  nằm giữa  $A$  và  $D$ ) không đi qua  $O$  cắt  $BC$  ở  $F$ . Hai tia  $CE$  và  $DB$  cắt nhau ở  $G$ , trên tia đối của tia  $BC$  lấy điểm  $H$  sao cho tứ giác  $CDHG$  nội tiếp đường tròn.

1) Chứng minh  $\frac{1}{AD} + \frac{1}{AE} = \frac{2}{AF}$ .

2) Khi tam giác  $CDG$  có diện tích bằng 1, chứng minh  $S_{DBE} \leq \frac{DE^2}{4BC^2}$ .

-----HẾT-----