

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Môn thi: **TOÁN (Chuyên Toán)**

Ngày thi: 28/2/2023

Thời gian làm bài: 150 phút

**Bài I. (2,0 điểm)**

1) Giải phương trình:  $1 + 3\sqrt{x} = 4x + \sqrt{2+x}$

2) Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện:  $a(a^2 + b + c) = b(b^2 + c + a) = c(c^2 + a + b) = 1$ . Chứng minh: Trong 3 số  $a, b, c$  có ít nhất 2 số bằng nhau.

**Bài II (2,0 điểm)**

1) Giả sử  $a, b$  là các số nguyên dương để  $a + 2b, b + 2a$  đều là số chính phương. Chứng minh  $7a^2 + 8ab + 9b^2$  chia hết cho 9.

2) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để  $5^n - 1$  có thể viết thành dạng tích của một số chẵn các số nguyên liên tiếp.

**Bài III (2,0 điểm)**

1) Cho  $P(x)$  là đa thức với hệ số nguyên thỏa mãn  $P(2021).P(2022) = 2023$ . Hỏi đa thức  $P(x)$  có nghiệm nguyên hay không?

2) Với  $a, b$  và  $c$  là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện  $0 \leq a, b, c \leq 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{a+b+c}{abc+1} + \sqrt[3]{abc}$ .

**Bài IV (3,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  nhọn không cân ( $AB < AC$ ) các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Lấy các điểm  $P, Q$  trên  $BE, CF$  sao cho  $EF PQ$  là hình bình hành có giao 2 đường chéo là  $H$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DPQ$  cắt lại  $BE, CF$  lần lượt tại  $K, L$  ( $K \neq P, L \neq Q$ ) đường thẳng  $AD$  cắt  $EF$  tại  $I$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ .

a. Chứng minh:  $\frac{HI}{HD} = \frac{FI}{FD}$  và 4 điểm  $D, M, E, F$  nằm trên một đường tròn.

b. Gọi  $G$  là giao điểm của  $PQ$  với  $AD$ ,  $N$  là giao điểm của  $DM$  với  $HC$ . Chứng minh:  $KL \parallel BC$  và các tam giác  $PDG, LDN$  đồng dạng.

c. Chứng minh:  $M, K, L$  thẳng hàng.

**Bài V (1,0 điểm)** Trong 100 số lẻ đầu tiên  $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 199$  hãy tìm số tự nhiên  $k$  bé nhất sao cho khi chọn  $k$  số tùy ý trong số 100 số trên bao giờ cũng có 2 số mà một trong 2 số đó là bội của số còn lại.

..... Hết .....

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1:

Họ, tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2: