



ĐỀ 02

Bài I. (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{7(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 3}$ và $B = \left(\frac{3\sqrt{x} - 3}{x - 4} - \frac{2}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$

với $x \geq 0; x \neq 4$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P = A.B$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài II. (2,0 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:

Hai người thợ, nếu cùng làm chung một công việc thì sau 15 giờ sẽ xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ hai làm tiếp trong 5 giờ thì cả hai người làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người cần bao lâu sẽ xong công việc đó?

Bài III. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2}{x+2} + \sqrt{y-1} = 3 \\ \frac{1}{x+2} - 3\sqrt{y-1} = -2 \end{cases}$$

2) Cho phương trình: $x^2 + 5x + k - 2 = 0$ (k là tham số) (1)

- Giải phương trình (1) khi $k = -4$.
- Tìm điều kiện của tham số k để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bài IV. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) có dây AB không là đường kính, gọi D là điểm thuộc tia đối của tia AB . Kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) vuông góc với dây AB tại C (P thuộc cung lớn AB). Tia DP cắt đường tròn (O) tại điểm M (M khác P), các đường thẳng AB và QM cắt nhau tại K :

- Chứng minh bốn điểm P, C, K, M cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ tiếp tuyến DE của đường tròn (O) (E là tiếp điểm và E thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm P). Chứng minh $DM.DP = DE^2$.
- Cho ba điểm A, B, D cố định, gọi F là giao điểm của PK và QD . Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm A và B thì $DK.DC = DE^2$ và $KP.KF$ không đổi.

Bài V. (0,5 điểm) Với các số thực dương x, y thỏa mãn: $x + \frac{3}{y} \leq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{3xy}{x^2 + 9y^2}$.

Bài I:

a) Thay $x = 9$ (tmđk) vào A, ta được: $A = \frac{7(\sqrt{9}+2)}{\sqrt{9}+3} = \frac{35}{6}$

b) $B = \left(\frac{3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-4} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{3\sqrt{x}-3-2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$
 $= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

c) $P = A \cdot B = \frac{7(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$

Vì $\sqrt{x}+3 \geq 3 > 0 \forall x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow 0 < \frac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{7}{3}$

Mà $P \in Z \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} \in Z \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} \in \{1; 2\}$

$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \in \left\{ 7; \frac{7}{2} \right\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \left\{ 4; \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ 16; \frac{1}{4} \right\}$ (t/m).

Vậy để P nguyên thì $x \in \left\{ 16; \frac{1}{4} \right\}$.

Bài II:

Gọi thời gian mỗi người thợ làm một mình xong công việc lần lượt là a, b (giờ, $a, b > 0$)

Trong 1 giờ, người thợ thứ nhất làm được $\frac{1}{a}$ công việc.

Trong 1 giờ, người thợ thứ hai làm được $\frac{1}{b}$ công việc.

Nếu 2 người thợ cùng làm chung công việc thì sau 15 giờ sẽ xong nên ta có phương

trình: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{15}$ (1)

Nếu người thợ thứ nhất làm 1 mình trong 3 giờ rồi nghỉ, sau đó người thứ 2 làm tiếp trong 5 giờ thì cả 2 người làm được $\frac{1}{4}$ công việc nên ta có phương trình:

$$\frac{3}{a} + \frac{5}{b} = \frac{1}{4}$$
 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{a} + \frac{5}{b} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{3}{b} = \frac{1}{5} \\ \frac{3}{a} + \frac{5}{b} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{b} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b} = \frac{1}{40} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 40 \end{cases} \text{ (t/m)}$$

Vậy nếu làm 1 mình thì người thứ nhất làm xong công việc trong 24 giờ, người thứ hai làm xong công việc trong 40 giờ.

Bài III:

$$1) \begin{cases} \frac{2}{x+2} + \sqrt{y-1} = 3 \\ \frac{1}{x+2} - 3\sqrt{y-1} = -2 \end{cases} \quad (\text{ĐK: } x \neq -2; y \geq 1)$$

Đặt $\begin{cases} \frac{1}{x+2} = a \\ \sqrt{y-1} = b \end{cases}$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 2a - 6b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} \frac{1}{x+2} = a \\ \sqrt{y-1} = b \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} \frac{1}{x+2} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (t/m)}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-1; 2)$.

2) c) Thay $k = -4$ ta được: $x^2 + 5x - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

Ta có: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49 > 0$. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

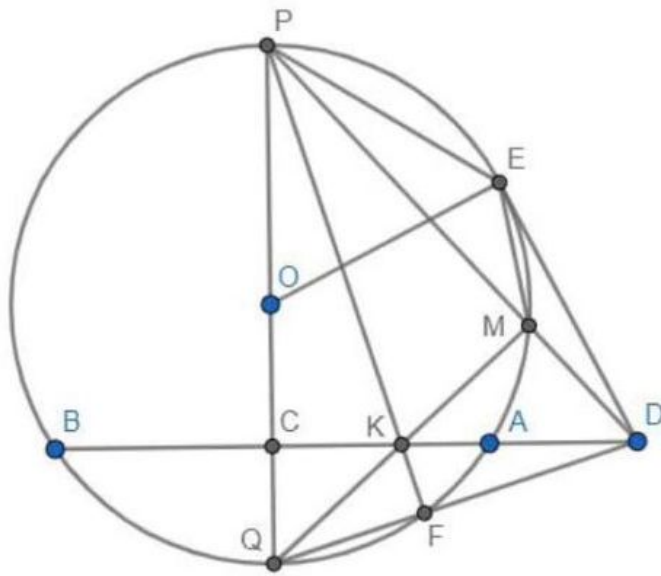
$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2} = -6$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; -6\}$.

d) Xét $\Delta = 5^2 - 4(k-2) = 33 - 4k$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 33 - 4k > 0 \Leftrightarrow k < \frac{33}{4}$.

Vậy $k < \frac{33}{4}$.

Bài IV:

a) Xét $\triangle PCK$ vuông tại C

$\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính PK.

Ta có: $\widehat{PMK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \triangle PMK$ vuông tại M

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính PK.

$\Rightarrow P, M, K, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính PK (đpcm).

b) Xét (O) có \widehat{DME} là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, chắn \widehat{ME}

\widehat{DPE} là góc nội tiếp chắn \widehat{ME}

$$\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DPE}$$

Xét $\triangle DME$ và $\triangle DEP$ có: $\widehat{DME} = \widehat{DPE}$ (cmt), \widehat{MDE} chung.

$$\Rightarrow \triangle DME \sim \triangle DEP (g.g) \Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{DE}{DP} \Rightarrow DM \cdot DP = DE^2 \text{ (đpcm)}.$$

c) Xét $\triangle DMK$ và $\triangle DCP$ có: $\widehat{DMK} = \widehat{DCP} = 90^\circ$ (cmt), \widehat{PDC} chung.

$$\Rightarrow \triangle DMK \sim \triangle DCP (g.g) \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{DK}{DP} \Rightarrow DM \cdot DP = DC \cdot DK$$

$$\text{Mà } DM \cdot DP = DE^2 \text{ (cmt)} \Rightarrow DK \cdot DC = DE^2 \text{ (đpcm)}$$

Xét $\triangle DPQ$ có K là giao điểm 2 đường cao QM và DC

$$\Rightarrow K \text{ là trực tâm } \triangle DPQ \Rightarrow PK \perp DQ \Rightarrow \widehat{PFQ} = 90^\circ$$

Ta chứng minh được $\triangle DAM \sim \triangle DPB (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DP} = \frac{DM}{DB} \Rightarrow DA \cdot DB = DM \cdot DP = DK \cdot DC \Rightarrow DK = \frac{DA \cdot DB}{DC}$$

Vì đường kính PQ vuông góc với AB tại C nên C là trung điểm của AB.

$$\Rightarrow D, A, C, B \text{ cố định} \Rightarrow DK = \frac{DA \cdot DB}{DC} \text{ không đổi} \Rightarrow K \text{ cố định.}$$

Ta chứng minh được $\triangle KCP \sim \triangle KFD (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{KC}{KF} = \frac{KP}{KD} \Rightarrow KP \cdot KF = KC \cdot KD \text{ không đổi do } K, C, D \text{ cố định (đpcm).}$$

Bài V:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{Q} = \frac{x^2 + 9y^2}{3xy} = \frac{x}{3y} + \frac{3y}{x} = \left(\frac{x}{3y} + \frac{y}{27x} \right) + \frac{80}{27} \cdot \frac{y}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có:

$$\frac{x}{3y} + \frac{y}{27x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{27x}} = \frac{2}{9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương ta có:

$$\frac{y}{x} + 3x + \frac{9}{y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y}{x} \cdot 3x \cdot \frac{9}{y}} = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + 3 \cdot 2 \geq \frac{y}{x} + 3 \left(x + \frac{3}{y} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 9 - 3 \cdot 2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q} = \left(\frac{x}{3y} + \frac{y}{27x} \right) + \frac{80}{27} \cdot \frac{y}{x} \geq \frac{2}{9} + \frac{80}{27} \cdot 3 = \frac{82}{9} \Rightarrow Q \leq \frac{9}{82}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{x}{3y} = \frac{y}{27x} \\ \frac{y}{x} = 3x = \frac{9}{y} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 3.$$

Vậy GTLN của Q là $\frac{9}{82} \Leftrightarrow x = 1; y = 3.$