

Câu 1(4,0 điểm):

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

(với $x \geq 0, x \neq 9$)

1. Rút gọn P
2. Tìm GTNN của P.

Câu 2(4,0 điểm):

1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + x + 6} + \sqrt{x^2 + x + 2} = x + \frac{4}{x}$

2. Tìm phần nguyên của số $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}}}$ (có 2023 dấu căn)

Câu 3(4,0 điểm):

1. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$
2. Cho các đường thẳng: $(d_1): 2x+y=6$; $(d_2): 3x+y=10$; $(d_3): (2m+1)x+2y=m+7$.
Tìm các giá trị của m để các đường thẳng trên đồng quy tại một điểm.

Câu 4(6 điểm):

Cho đường tròn (O; R) và một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O;R). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O; R) (B, C là các tiếp điểm). Từ B vẽ đường kính BD của (O; R), đường thẳng AD cắt (O; R) tại các điểm E (khác điểm D), gọi H là giao điểm của OA và BC.

1. Chứng minh $AE.AD = AH.AO$.
2. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với AD tại K cắt BC tại F. Chứng minh rằng FD là tiếp tuyến của (O; R).
3. Đường thẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB vuông góc với cạnh OA tại M cắt đường thẳng DF tại N. Tam giác AND là tam giác gì? Vì sao?

Câu 5(2,0 điểm):

1. Giả sử a,b là các số nguyên dương thay đổi thỏa mãn:

$$\frac{ab+1}{a+b} < \frac{3}{2} \text{ Hãy tìm giá trị lớn nhất: } P = \frac{a^3b^3+1}{a^3+b^3}$$

2. Trên bảng có các số tự nhiên từ 1 đến 2022, người ta làm như sau: Lấy ra hai số bất kì và thay bằng hiệu của chúng, cứ làm như vậy đến khi còn một số trên bảng thì dừng lại. Có thể làm để trên bảng chỉ còn lại số 2 được không? Giải thích?

