

Bài 1: (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

b) Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn: $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - xz}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$.

Bài 2: (2,0 điểm).

a) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$.

b) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2023} = y + 3m \end{cases}$$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$.

Bài 3: (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x + y)^3 = (x - y - 6)^2$.

b) Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD. Chứng minh rằng: $2AD \leq BM + CN$.

Bài 4: (3,0 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E. Gọi F là giao điểm của AM và CD.

a) Chứng minh tam giác EMF là tam giác cân.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM. Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng.

c) Chứng minh góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD.

Bài 5: (1,0 điểm).

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$

HẾT

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)