

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Môn: Toán

Ngày thi: 23/12/2022

Thời gian làm bài: 90 phút
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I: (2,0 điểm).

Cho hai biểu thức: $H = \frac{4x-2}{\sqrt{x+2}}$ và $N = \frac{1}{\sqrt{x+5}} - \frac{7}{25-x}$, với $x \geq 0; x \neq 25$.

1) Tính giá trị của biểu thức H khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức $K = N.H$.

Câu II: (2,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - \frac{1}{4}\sqrt{48}$.

2) Tìm x biết: $\sqrt{x}(1-4\sqrt{x}) + 1 - 4\sqrt{x} = 0$.

Câu III: (2,0 điểm).

1) Vẽ đồ thị hàm số $(d): y = x + 1$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

2) Cho hàm số bậc nhất $y = (4 - 2m)x + 2022$, với m là tham số và $m \neq 2$.

a) Với những giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến?

b) Tìm giá trị của m biết đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Câu IV: (3,5 điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho $AC > BC$. Kẻ đường cao CH của tam giác ABC ($H \in AB$), kéo dài CH cắt $(O; R)$ tại điểm D ($D \neq C$). Tiếp tuyến tại điểm A và tiếp tuyến tại điểm C của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại điểm M . Gọi I là giao điểm của OM và AC .

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OM .

b) Hai đường thẳng MC và AB cắt nhau tại F .

Chứng minh $BC = 2.IO$ và DF là tiếp tuyến của $(O; R)$.

c) Chứng minh $AF.BH = BF.AH$.

Câu V: (0,5 điểm).

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$.

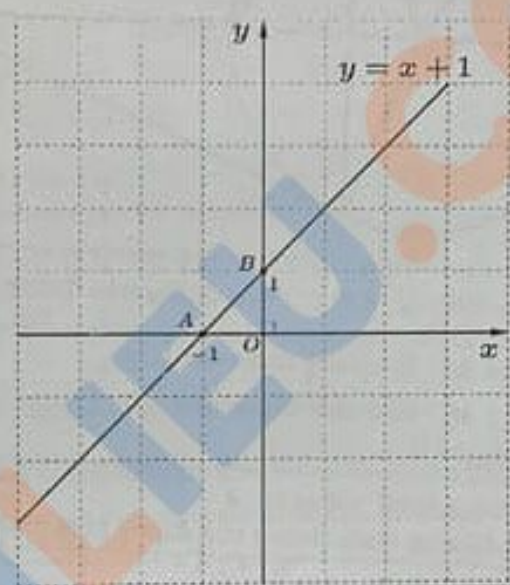
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{(x+1)(y+1)(x+y)}{xy}$.

----- Hết -----

Họ tên thí sinh:.....SBD.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm
I	1	Cho hai biểu thức: $H = \frac{4x-2}{\sqrt{x+2}}$ và $N = \frac{1}{\sqrt{x+5}} - \frac{7}{25-x}$, với $x \geq 0; x \neq 25$.	1,0 đ
		1) Tính giá trị của biểu thức H khi $x=16$. Với $x=16$ (thỏa mãn điều kiện), thay vào biểu thức H ta được: $H = \frac{4 \cdot 16 - 2}{\sqrt{16+2}} = \frac{62}{6} = \frac{31}{3}$	0,75 đ
		Vậy $H = \frac{31}{3}$ khi $x=16$.	0,25 đ
	2	2) Rút gọn biểu thức $K = N.H$.	1,0 đ
		$K = N.H = \left(\frac{1}{\sqrt{x+5}} - \frac{7}{25-x} \right) \cdot \frac{4x-2}{\sqrt{x+2}}$	
		$K = \left[\frac{1}{\sqrt{x+5}} + \frac{7}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} \right] \cdot \frac{4x-2}{\sqrt{x+2}}$	0,25 đ
		$K = \left[\frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} + \frac{7}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} \right] \cdot \frac{4x-2}{\sqrt{x+2}}$	0,25 đ
		$K = \left[\frac{\sqrt{x}-5+7}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} \right] \cdot \frac{4x-2}{\sqrt{x+2}}$	
		$K = \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5})} \right] \cdot \frac{4x-2}{\sqrt{x+2}}$	0,25 đ
		Vậy $K = \frac{4x-2}{x-25}$ với $x \geq 0; x \neq 25$.	0,25 đ
II	1	1) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - \frac{1}{4}\sqrt{48}$.	1,0 đ
		$A = 2\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{3}$	0,5 đ
		$A = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \sqrt{3}$	0,25 đ
		$A = 10\sqrt{3}$.	0,25 đ
	2	2) Tìm x biết: $\sqrt{x}(1-4\sqrt{x}) + 1 - 4\sqrt{x} = 0$.	1,0 đ
		Điều kiện xác định: $x \geq 0$.	0,25 đ
		$\sqrt{x}(1-4\sqrt{x}) + 1 - 4\sqrt{x} = 0$ $\Leftrightarrow (1-4\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) = 0$	0,25 đ

		$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4\sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{1}{4} \\ \sqrt{x}=-1 \text{ (KTM)} \end{cases}$	0,25 đ
		$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \text{ (TMĐK).}$	0,25 đ
		Vậy $x = \frac{1}{16}$.	0,25 đ
III	1	1) Vẽ đồ thị hàm số (d): $y = x + 1$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .	1,0 đ
		<p>Đồ thị của hàm số (d): $y = x + 1$ là một đường thẳng cắt trục hoành tại điểm $A(-1; 0)$ cắt trục tung tại điểm $B(0; 1)$.</p> <p><i>Lưu ý: Học sinh lập bảng giá trị vẫn cho điểm tối đa.</i></p>	0,5 đ
		<p>Vẽ đồ thị:</p> 	0,5 đ
	2.a	2) Cho hàm số bậc nhất $y = (4 - 2m)x + 2022$, với m là tham số và $m \neq 2$.	0,5 đ
		a) Với những giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến?	
		Xét hàm số bậc nhất $y = (4 - 2m)x + 2022$ (I) với $m \neq 2$.	
		Để hàm số đã cho nghịch biến thì:	0,25 đ
		$4 - 2m < 0 \Leftrightarrow 2m > 4 \Leftrightarrow m > 2$.	
		Kết hợp với điều kiện $m \neq 2$, ta được: $m > 2$.	0,25 đ
		Vậy $m > 2$ để hàm số nghịch biến.	
	2.b	b) Tìm giá trị của m biết đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.	0,5 đ
		Để đồ thị hàm số (I) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 thì:	
		Đồ thị hàm số (I) đi qua điểm $(2; 0)$	0,25 đ
		$\Rightarrow 0 = (4 - 2m) \cdot 2 + 2022$	
		$\Leftrightarrow (4 - 2m) \cdot 2 = -2022$	
		$\Leftrightarrow 4 - 2m = -1011$	

	<p>Chứng minh được: IO là đường trung bình $\triangle ABC$ $\Rightarrow IO = \frac{1}{2} BC$ (tính chất) $\Rightarrow BC = 2.IO$ (điều phải chứng minh).</p>	0,25 đ
	<p>* Chứng minh DF là tiếp tuyến của $(O; R)$. Xét $\triangle OCD$ có: $OC = OD = R$ nên $\triangle OCD$ cân tại O Mà OH là đường cao của $\triangle OCD$ $\Rightarrow OH$ là đường phân giác của $\triangle OCD \Rightarrow \widehat{COF} = \widehat{DOF}$.</p>	0,25 đ
	<p>Chứng minh được $\triangle COF = \triangle DOF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OCF} = \widehat{ODF}$ Mà $\widehat{OCF} = 90^\circ$ (do $OC \perp MF$) $\Rightarrow \widehat{ODF} = 90^\circ \Rightarrow OD \perp DF$ tại F.</p>	0,25 đ
	<p>Xét (O) có: $OD \perp DF$ tại F $\Rightarrow DF$ là tiếp tuyến của $(O; R)$ (định lý) (điều phải chứng minh).</p>	0,25 đ
c	<p>c) Chứng minh $AF.BH = BF.AH$.</p>	0,5 đ
	<p>Ta có: $\widehat{BCF} = 90^\circ - \widehat{OCB}$ (1) Lại có: $\widehat{BCH} = 90^\circ - \widehat{OBC}$ (2) Chứng minh $\triangle OBC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$ (3) Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BCH}$ $\Rightarrow CB$ là tia phân giác của $\widehat{HCF} \Rightarrow \frac{BH}{BF} = \frac{CH}{CF}$ (*)</p>	0,25 đ
	<p>Chứng minh được CA là đường phân giác ngoài $\triangle HCF \Rightarrow \frac{AH}{AF} = \frac{CH}{CF}$ (**) Từ (*) và (**) $\Rightarrow \frac{BH}{BF} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AF.BH = BF.AH$ (điều phải chứng minh).</p>	0,25 đ
v	<p>Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{(x+1)(y+1)(x+y)}{xy}$.</p>	0,5 đ
	<p>Ta có: $B = \frac{(x+1)(y+1)(x+y)}{xy} = 2 + x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $= 2 + x + y + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $= 2 + \left(x + \frac{1}{2x}\right) + \left(y + \frac{1}{2y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.</p>	0,25 đ
	<p>Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt{2}$ (1) $y + \frac{1}{2y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{2y}} = \sqrt{2}$ (2) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$ (3) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}$</p>	

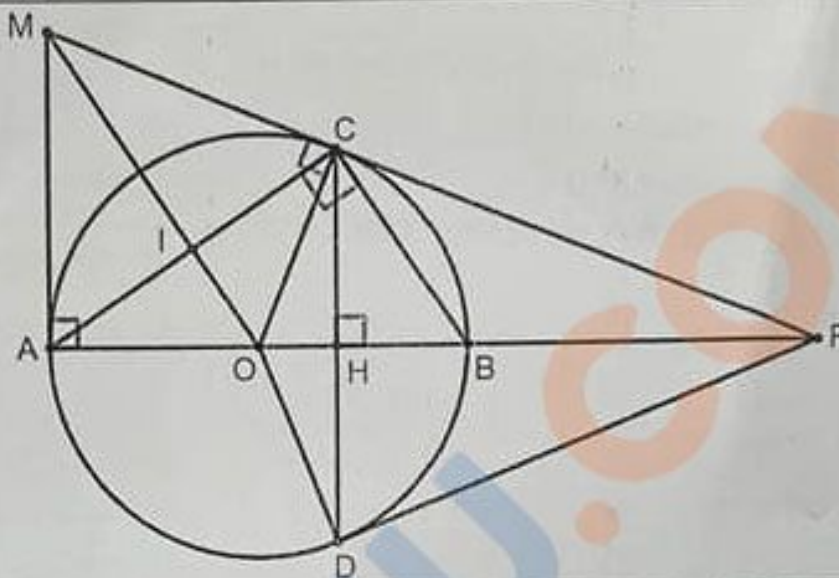
$$\Leftrightarrow 2m = 1015 \Leftrightarrow m = \frac{1015}{2} \text{ (TMĐK).} = 507,5$$

Vậy $m = \frac{1015}{2}$ là giá trị cần tìm.

0,25 đ

IV

Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho $AC > BC$. Kẻ đường cao CH của tam giác ABC ($H \in AB$), kéo dài CH cắt $(O; R)$ tại điểm D ($D \neq C$). Tiếp tuyến tại điểm A và C của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại điểm M . Gọi I là giao điểm của OM và AC .



0,25 đ

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, C thuộc đường tròn đường kính OM .

1,25 đ

Xét (O) có: MA và MC là hai tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow OA \perp AM; OC \perp MC$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^\circ$.

Ta có: $\widehat{MAO} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MAO$ vuông tại A

\Rightarrow Ba điểm M, A, O cùng thuộc đường tròn đường kính OM .

0,25 đ

Lại có: $\widehat{MCO} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MCO$ vuông tại C

\Rightarrow Ba điểm M, C, O cùng thuộc đường tròn đường kính OM .

0,25 đ

Vậy bốn điểm M, A, O, C thuộc đường tròn đường kính OM .

0,25 đ

b) Hai đường thẳng MC và AB cắt nhau tại F .
Chứng minh $BC = 2 \cdot IO$ và DF là tiếp tuyến của $(O; R)$.

1,5 đ

* Chứng minh $BC = 2 \cdot IO$.

Xét (O) có: MA, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M

$\Rightarrow OM$ là tia phân giác của \widehat{AOC} (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

0,25 đ

Xét ΔOAC có: $OA = OC = R$ nên ΔOAC cân tại O

Mà OM là tia phân giác của \widehat{AOC}

$\Rightarrow OM$ là đường trung tuyến ΔOAC

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AC .

0,25 đ

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \sqrt{2} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta được:

$$2 + \left(x + \frac{1}{2x} \right) + \left(y + \frac{1}{2y} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4 + 3\sqrt{2}.$$

Vậy $\min B = 4 + 3\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức đồng thời xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = y; x = \frac{1}{2x}; y = \frac{1}{2y} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = 1; x > 0; y > 0 \end{cases}$$

0,25đ

*Tổ giám khảo thống nhất để chia nhỏ điểm thành phần nhưng không được thay đổi tổng điểm.
Học sinh làm cách khác mà vẫn đúng thì vẫn cho điểm tối đa.*