

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức: $A = (4x^5 - 4x^4 - 9x^3 + 2x^2 - 1)^{2022} + 2022$

b) Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn: $a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{3+a} + \frac{\sqrt{b}}{3+b} + \frac{\sqrt{c}}{3+c} = \frac{6}{\sqrt{(3+a)(3+b)(3+c)}}$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;2)$ và đường thẳng $(d): y = ax + b$ (với $a > 0$).

Tìm a, b để đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B (A, B khác gốc tọa độ) thỏa mãn: $12.OA + 5.OB = 13.AB$

b) Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên, đồng thời thỏa mãn: $f(16) = 2022$ và $f(3) = 2$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $10x^2 + 6x = \sqrt{\frac{4x+3}{5}}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 3xy + 2y^2} = x + y + 2xy \\ \sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3y + 2} = y + 5 \end{cases}$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{ab+2c^2}{2+ab-c^2}} + \sqrt{\frac{bc+2a^2}{2+bc-a^2}} + \sqrt{\frac{ca+2b^2}{2+ca-b^2}} \geq 2 + \frac{ab+bc+ca}{2}$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Lấy điểm M bất kỳ trên đường chéo AC . Qua M kẻ MP song song với AB ; MQ song song với CD ($P \in BC; Q \in AD$). Chứng minh rằng: $\frac{1}{MP^2 + MQ^2} \leq \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}$.

Khi $\frac{1}{MP^2 + MQ^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}$, tính độ dài đoạn thẳng CM theo độ dài các đoạn thẳng AB, AC, CD .

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn, vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Lấy điểm N nằm trên đường tròn và thuộc miền trong của tam giác AMB (N khác A, B). Vẽ tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$ tại điểm N cắt MA, MB thứ tự tại P, Q . Đoạn thẳng AB cắt đoạn thẳng OP tại E ; cắt đoạn thẳng OQ tại F . Chứng minh rằng: $AE.BF = PN.NQ$.

Câu 7. (2,0 điểm)

Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab + 3(a + b) + 2023$ chia hết cho 5.

Chứng minh rằng $a - b$ chia hết cho 5.