UBND QUẬN BA ĐÌNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN
CÁC MÔN VĂN HOÁ VÀ MÔN KHOA HỌC LỚP 9
NĂM HỌC 2022 – 2023

MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 29/11/2022
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm 01 trang)

Bài I. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2+x-3=3\sqrt{x-1}$.

2) Xét các số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2-4x+2y+5=0$, tính $P=(x-1)^{2022}+(y+2)^{2023}$.

Bài II. (5,0 điểm)

1) Cho các số nguyên a,b,c thoả mãn $a-b+c$ và $ab+c^2$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 5.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{3n-1}.5^{n+1}+96$ là số chính phương.

Bài III. (2,0 điểm)

Với các số thực a,b,c thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=4$, chứng minh $4<\sqrt{1+ab}+\sqrt{1+bc}+\sqrt{1+ca}\le 5$.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ đường kính AK của đường tròn (O).

1) Chứng minh: ba điểm H,M,K thẳng hàng.

2) Gọi P là giao điểm của AK với BE, Q là giao điểm của AD với BK. Chứng minh: $\widehat{BAD}=\widehat{CAK}$ và hai tam giác AEP và BDQ đồng dạng.

3) Chứng minh: DE chia đôi đoạn thẳng PQ.

Bài V. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn $x\ne 1$ và $y^2=\dfrac{x^6-1}{x-1}$.

2) Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$. Với mỗi số tự nhiên $n=2,3,4,5,6,7,$ gọi A_n,B_n,C_n tương ứng là trung điểm các cạnh $B_{n-1}C_{n-1},C_{n-1}A_{n-1},A_{n-1}B_{n-1}$. Tất cả các đỉnh A_i,B_i,C_i được tô bởi đúng một trong hai màu: xanh hoặc đỏ tùy ý với $i=1,2,...,7$. Chứng minh rằng trong 21 đỉnh A_i,B_i,C_i với $i=1,2,...,7$ luôn tồn tại 4 đỉnh được tô cùng màu và là 4 đỉnh của một hình thang cân.

----- HẾT -----

Problem II

1) $a-b+c \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow (a-b+c)^2 \equiv 0 \pmod 5$ (1)

$ab+c^2 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 2ab+2c^2 \equiv 0 \pmod 5$ (2).

(1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc \equiv 0 \pmod 5$ (3)

(2) + (3) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ac-2bc+2c^2 \equiv 0 \pmod 5$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2c(a-b+c) \equiv 0 \pmod 5$ (4)

Since $a-b+c \equiv 0 \pmod 5$ is given

$\Rightarrow 2c(a-b+c) \equiv 0 \pmod 5$ (5)

(4),(5) $\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \equiv 0 \pmod 5$ (proved).

2) $2^{3n-1} \cdot 5^{n+1} + 96 = m^2 \Leftrightarrow \frac{8^n}{2} \cdot 5(5^n) + 96 = m^2$

$\Leftrightarrow 5(8^n \cdot 5^n) + 192 = 2m^2 \Leftrightarrow 5(40^n) + 192 = 2m^2$

Since $2m^2 \equiv 0 \mod (2) \Rightarrow 5(40^n) \equiv 0 \pmod 2$

$\Rightarrow 40^n \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow \boxed{n \in \mathbb{Z}^+}$ proved ✓