

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề bài gồm 01 trang)

**ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9  
THÁNG 10 - NĂM HỌC 2022-2023**

Thời gian 150 phút

**Câu 1: (2 điểm)**

1) Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $(x + \sqrt{x^2 + 2020})(y + \sqrt{y^2 + 2020}) = 2021$

Tính giá trị của biểu thức:  $M = x\sqrt{y^2 + 2020} + y\sqrt{x^2 + 2020}$

2) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b + c = 5$  và  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{\sqrt{a}}{a+2} + \frac{\sqrt{b}}{b+2} + \frac{\sqrt{c}}{c+2} = \frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

**Câu 2: (2 điểm)**

1) Giải phương trình:  $\sqrt{3x+3} + \sqrt{3-x} = x + \sqrt{(3x+3)(3-x)} - 1$

2) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - \frac{6}{y} = 2 \\ 3x - \frac{8}{y^3} = -2 \end{cases}$$

**Câu 3: (3 điểm)**

1) Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn phương trình:

$$x(y^2 + 1) = 2y(16 - x).$$

3) Cho  $a, b, c, k$  là các số nguyên thỏa mãn:  $a^3 + b^3 + c^3 - 1 = k^2 - 2k - 2a + b - 2c$ .

Chứng minh rằng  $k - 1$  chia hết cho 3

**Câu 4: (3 điểm)** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $BC$ .  $A$  là điểm di động trên nửa đường tròn. Vẽ  $AH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$ . Đường tròn đường kính  $AH$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $D, E$  và cắt  $(O)$  tại  $M$ .  $AO$  cắt  $DE$  tại  $I$ .

a) Tính  $\frac{DE^3}{BD \cdot CE}$  theo  $R$

b) Tính:  $\frac{AI}{HB} + \frac{AI}{HC}$

c) Xác định vị trí của điểm  $A$  để diện tích tam giác  $ABH$  lớn nhất

**Câu 5 (1 điểm):** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 3$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = \frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ac}$

-----Hết-----