

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (6 điểm): Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$

- Nêu DKXD; rút gọn P
- Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$
- Tìm giá trị của x để $\frac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên

Câu 2 (3 điểm):

- Giải phương trình tự nhiên của phương trình: $2xy - 8x - 3y + 9 = 0$
- Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $a^2 + a = 2b^2 + b$.

Chứng minh rằng $a - b$ và $a + b + 1$ đều là các số chính phương.

Câu 3 (2 điểm)

Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$.

Câu 4: (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A trên cạnh BC lấy điểm D bất kỳ. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB và AC.

a) Chứng minh rằng $DB \cdot DC = EA \cdot EB + FA \cdot FC$.

b) Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$.

Chứng minh: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2}$

c) Gọi P là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Xác định vị trí điểm P để tổng bình phương khoảng cách từ P đến các cạnh BC; CA; AB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{ab+c^2} + \frac{b+c}{bc+a^2} + \frac{c+a}{ca+b^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$