

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 04/10/2022

(Đề thi có 01 trang, gồm 04 bài)

Bài 1 (5,0 điểm)

Cho dãy số thực $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n},$$

với mọi số nguyên dương m, n . Chứng minh rằng (x_n) là một cấp số cộng.

Bài 2 (5,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 4\sqrt{abc}$. Chứng minh rằng

$$2(ab + bc + ca) + 4 \min(a^2, b^2, c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 3 (5,0 điểm).

Xét ABC là tam giác không cân có độ dài các cạnh là các số tự nhiên. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm BC và CA ; G là trọng tâm tam giác ABC . Giả sử bốn điểm D, C, E, G cùng nằm trên một đường tròn. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC .

Bài 4 (5,0 điểm).

Tính số phần tử của tập hợp: $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid 0 \leq x_1 + x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 2022\}$.

HẾT

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 05/10/2022

(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)

Bài 5 (6,0 điểm).

a) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

b) Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(y) = g(x+y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Bài 6 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau ở S . Gọi M là trung điểm BC . EM cắt SC tại I , FM cắt SB tại J .

a) Chứng minh rằng các điểm I, S, M, J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại điểm thứ hai là T . Đường thẳng AH cắt (O) tại điểm thứ hai là K . Chứng minh rằng S, K, T thẳng hàng.

Bài 7 (7,0 điểm).

a) Cho p là số nguyên tố có dạng $4k+1 (k \in \mathbb{N})$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho a^2+1 chia hết cho p .

b) Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y, z, ω , với $0 < \omega < p$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 - \omega p = 0$.

HẾT