SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI** **LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2022 – 2023**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**MÔN : TOÁN** ***Thời gian làm bài: 180 phút*** ***Ngày thi: 27/09/2022*** (Đề thi có *01* trang)

Bài 1 (4,0 điểm).

a) Xét các số thực a,b,c thay đổi trên đoạn $[1;2]$ sao cho $a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=4\left(\frac{bc^2}{a+b}+\frac{ca^2}{b+c}+\frac{ab^2}{c+a}\right)+ab+bc+ca.$

b) Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên thỏa mãn : $P\left(1+\sqrt[3]{3}\right)=2\sqrt[3]{3}+4$ và $P\left(2+\sqrt{6}\right)=3+\sqrt{6}$?

Bài 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1=1;\,u_{n+1}=u_n+\frac{2}{u_n}+\frac{n}{u_n^4}$ với mọi n nguyên dương.

Chứng minh dãy số (y_n) với $y_n=\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ (n nguyên dương) có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. H là hình chiếu vuông góc của D lên EF. Tia IH cắt đường tròn (O) tại K. Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KBF,KCE cắt nhau tại T khác K. Gọi M là trung điểm TD. Qua M kẻ tiếp tuyến MN của đường tròn (I) (N là tiếp điểm khác D).

a) Chứng minh T,E,F thẳng hàng và đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC tiếp xúc (I).

b) AN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC ở S khác N. Hai tiếp tuyến của đường tròn (I) kẻ từ S cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC lần lượt tại P,Q. Chứng minh hai đường thẳng PQ và BC song song với nhau.

Bài 4 (2,0 điểm). Kí hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập hợp các số thực dương. Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ sao cho với mọi số thực dương x,y thì $f\left(x+f(y)\right)=yf(1+xy)$.

Bài 5 (3,0 điểm). Tìm tất cả số nguyên dương a và n cùng lớn hơn 1 sao cho a^n-1 chia hết cho n^a.

Bài 6 (3,0 điểm). Hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 2023 được chia thành 2023^2 ô vuông đơn vị. Ta kí hiệu (m,n) là ô ở hàng thứ m và cột thứ n. Người ta tô tất cả các ô vuông đơn vị bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô khác nhau đối xứng qua đường thẳng AC thì được tô khác màu. Gọi S là tập hợp các bộ ba số m,n,p đôi một khác nhau (không phân biệt thứ tự); $m,n,p\in\{1;2;3;...;2023\}$ sao cho các ô (m,n), (n,p) và (p,m) có cùng màu. Kí hiệu $|S|$ là số phần tử tập hợp S.

a) Tồn tại hay không cách tô màu sao cho $|S|=0$?

b) Chứng minh rằng: $|S|\le 1^2+2^2+...+1011^2$.

------------- **HẾT** -------------