

Bài 1. (3,00 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{2x^2 + x - 1}{1-x^2} + \frac{2x^3 + x^2 - x}{1+x^3} \right)$, với $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm giá trị nhỏ nhất của A khi $x \geq 3$.

Bài 2. (3,00 điểm)

Giải phương trình $\frac{x+3}{x^2+6x} + \frac{x+5}{x^2+10x+16} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+6}{x^2+12x+35}$.

Bài 3. (6,00 điểm)

a) Cho bảy số nguyên tố phân biệt $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_7$ thỏa mãn $p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 + \dots + p_7^4$ chia hết cho 2. Chứng minh $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$.

b) Gọi A là một tập hợp con của tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x \in A, y \in A, x > y$ thì $\frac{7y^2}{4x-y} \in A$. Hỏi có bao nhiêu tập hợp A như vậy?

Bài 4. (6,00 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A , điểm D trên cạnh huyền BC (D khác B, C). Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB và G là giao điểm của AB với DE . Từ giao điểm H của AB với CE , hạ đoạn thẳng HI vuông góc với BC tại điểm I . Các tia CH và IG cắt nhau tại điểm K .

a) Gọi F là điểm đối xứng của D qua AC . Chứng minh rằng khi D di động trên cạnh BC thì đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh $BK \perp CE$.

c) Chứng minh rằng tia KC là tia phân giác của góc \widehat{AIK} .

Bài 5. (2,00 điểm)

Gọi a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh của tam giác, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq 6.$$