

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 30/09/2022

Câu 1. (4,0 điểm)

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = y \\ y^3 - 2y - 7 = z \\ (z+3)(z^2 + 2z + 2) = x \end{cases}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2022 \\ 4x_n^2 - 4(2x_n + 1)x_{n+1} + 2023 = 0, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có trực tâm H và ba đường cao AD, BE, CF . Gọi M là trung điểm của BC , X là giao điểm của BC và EF . Đường thẳng qua X song song với HM cắt BE, CF lần lượt tại P và Q .

a) Chứng minh $XAMD = AD.HM$.

b) Chứng minh bốn điểm A, P, Q, H đồng viên.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho số nguyên tố $p \geq 5$.

a) Đặt $n = 4^p - 1$. Chứng minh rằng n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.

b) Với a là một số tự nhiên, chứng minh rằng $2 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}$ không là số chính phương.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1, 2, \dots, 13\}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại một họ gồm ít nhất 131 tập con có 7 phần tử của X sao cho hai tập con A, B bất kì trong họ đều thỏa mãn $|A \cap B| \leq 5$.

b) Xét họ Ω gồm k tập con có 7 phần tử của X . Một tập con A của X được gọi là tập mẹ nếu như $|A| = 8$ và tồn tại $B \in \Omega$ sao cho $B \subset A$. Gọi d là số tập mẹ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{d}{k}$.