PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN PHÚC THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học: 2022 – 2023
Môn: Toán
Thời gian làm bài: **150** phút
(*Không kể thời gian phát đề*)

Bài 1. *(5,0 điểm)*

a) Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$. Tính giá trị của $A=\dfrac{2023x^2-4048x+2026}{x^2-2x+1}$

b) Cho a, b, c là các số nguyên thoả mãn: $a+b+c=c^3-2023c$. Chứng minh rằng $M=a^3+b^3+c^3 \vdots 6$

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^2+xy-2020x-2021y-2022=0$

Bài 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$ thì giá trị của: $P=\dfrac{3ab}{4a^2-b^2}$ là một số nguyên tố.

b) Giải phương trình : $x^2+2x=4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}$.

Bài 3. *(3,0 điểm)*

a) Cho x, y là hai số dương thoả mãn: $(x+y)^2 \geq 6+2xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x^4-2x^2+y^2+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{8}{y^2}$

b) Cho $M=(x^2+2yz-1)(y^2+2xz-1)(1-z^2-2xy)$.

Trong đó x,y,z là các số hữu tỉ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng : $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.

Bài 4. (6 điểm). Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm AC, F là hình chiếu của I trên BC. Kẻ tia Cx vuông góc AC cắt IF tại E.

a) Cho AB= 20cm, HC = 9cm. Tính độ dài AH và AC.

b) Chứng minh rằng: HA.HI=HB.HE

c) Chứng minh AE vuông góc với BI.

Bài 5. (2 điểm) Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \geq a+b+c$$

----------- ***Hết*** ----------

Ghi chú: *Giám thị không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh : .... Số báo danh : ....

Họ tên, chữ ký của giám thị 1: *Họ tên, chữ ký của giám thị 2:*

Họ tên, chữ ký của giám thị 1:

UBND HUYỆN PHÚC THỌ

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Họ tên, chữ ký của giám thị 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM

THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Năm học: 2022 – 2023

Môn: Toán

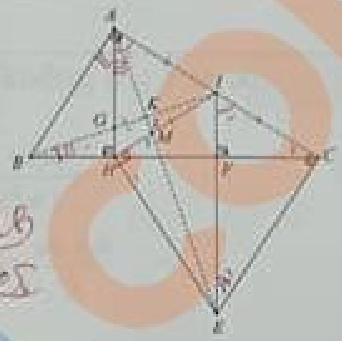
a = bk+1

$a^n = bk + 1^n$

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 a	a) Cho $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$. Tính giá trị biểu thức	2.0
	Ta có $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-(\sqrt{2}-2)=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-2)$ $=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-2)$ $=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-2)=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-2)=2$	0.5 0,5 0,5
	$A=\dfrac{2022x^2-4044x+2022+x^2-4x+4}{x^2-2x+1}=2022+\dfrac{(x-2)^2}{(x-1)^2}$	0.5
	Thay x = 2 vào A được A= 2022	0.5
Câu 1 b	b) Cho a, b, c là các số nguyên thoả mãn: $a+b+c=c^3-2023c$. Chứng minh rằng: $M=a^3+b^3+c^3 \vdots 6$	1,5
	Ta có: $a+b+c=c^3-2023c \Leftrightarrow a+b+c=(c^3-c)-2022c$ $\Leftrightarrow a+b+c=(c-1)c(c+1)-2022c$	0.5
	(Vì $(c-1)c(c+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có thừa số chia hết cho 2, thừa số chia hết cho 3 mà (2;3)=1 nên tích đó chia hết cho 6; $2022c \vdots 6$) $\Rightarrow a+b+c=(c-1)c(c+1)-2022c \vdots 6$ (1)	0.5
	Mặt khác: $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)$ $=(a-1)a(a+1)+(b-1)b(b+1)+(c-1)c(c+1) \vdots 6$ (2)	0.25
	Từ (1) và (2) suy ra: $M=a^3+b^3+c^3 \vdots 6$	0.25

Câu 1 c	c) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+xy-2020x-2021y-2022=0$.	1.5
	Ta có $x^2+xy-2020x-2021y-2022=0$ $\Leftrightarrow x^2+xy+x-2021x-2021y-2021=1$	
	$\Rightarrow (x+y+1)(x-2021)=1=1.1=-1.(-1)$	0.75
	TH1: $\begin{cases} x+y+1=1 \\ x-2021=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2022 \\ x=2022 \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} x+y+1=-1 \\ x-2021=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2022 \\ x=2020 \end{cases}$	0.5 0.5
	Vậy $(x,y)\in\{(2022,-2022);(2020,-2022)\}$.	0.25
Câu 2 a	Cho $4a^2+b^2=5ab$ với $2a>b>0$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{3ab}{4a^2-b^2}$	2.0
	Phân tích được $4a^2+b^2=5ab$ thành $(a-b)(4a-b)=0$ $\Leftrightarrow$ a=b hoặc 4a=b Lập luận chỉ ra a=b (nhận) ; 4a=b (loại vì 2a>b>0) Khi $4a^2+b^2=5ab$ với 2a>b>0 thì a=b . Tính được $P=\dfrac{3ab}{4a^2-b^2}=\dfrac{3a^2}{3a^2}=1$ không là SNT	0.5 ~~0.5~~ ~~1~~ 0,5
Câu 2 b	Giải phương trình : $x^2+2x=4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}$	2.0
	ĐK: $x\neq 0$ phương trình => $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$ <=> $x^4-2x^3+4x^3-8x^2+4x^2-8x+3x-6=0$ <=> $x^3(x-2)+4x^2(x-2)+4x(x-2)+3(x-2)=0$ <=> $(x-2)(x^3+4x^2+4x+3)=0$ <=> $(x-2)(x^3+3x^2+x^2+3x+x+3)=0$	0.25 0.25

	$\Leftrightarrow (x-2)[x^2(x+3)+x(x+3)+(x+3)]=0$ $\Leftrightarrow (x-2)(x+3)(x^2+x+1)=0$	0.5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+3=0 \\ x^2+x+1=0(*) \end{array}\right.$ Lập luận (*) vô nghiệm và KL: Vậy $S=\{2;-3\}$	0,5 0,5
Câu 3 **a**	a) Cho x, y là hai số dương thoả mãn: $(x+y)^2 \geq 6+2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x^4-2x^2+y^2+\frac{6}{x^2}+\frac{8}{y^2}$	**1.5**
	$Q=(x^2-2)^2+\frac{x^2+y^2}{2}+\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{6}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{8}{y^2}\right)-4$	0.25
	ta có: $A^2+B^2 \geq 2AB$ dấu = xảy ra khi A=B $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{x}\right)^2 \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}}.x.\frac{\sqrt{6}}{x}=6;$ $\frac{y^2}{2}+\frac{8}{y^2}=\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{8}}{y}\right)^2 \geq 2.\frac{y}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{8}}{y}=4$	0.5
	Mặt khác: $(x^2-2)^2 \geq 0\ \forall x$; $(x+y)^2 \geq 6+2xy \Rightarrow x^2+y^2 \geq 6 \Rightarrow \frac{(x^2+y^2)}{2} \geq \frac{6}{2}=3$ Do đó $Q \geq 0+3+6+4-4=9$	0.25 0.25
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-2=0 \\ x^2+y^2=6 \\ \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{x}\right) \\ \frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}}{y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=2 \\ y^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ y=2 \end{array}\right.$ (T/M) Vậy $Q_{min}=9 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}; y=2$	0.25

Câu 3 **b**	Giải: Thay xy+yz+zx =1vào M ta có M = $(x^2 + 2yz-1)(y^2+2xz-1)(1-z^2-2xy)$ $= (x^2 + yz- xy-xz)(y^2+xz-xy-yz)(xz+z-z^2-xy)$ $= (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$ $\Rightarrow \sqrt{M} = \lvert(x-y)(x-z)(y-z)\rvert$ Do x,y,z là các số hữu tỉ nên $\sqrt{M}$ là một số hữu tỉ.	 0,5 0,5 0,5
Câu 4 **a**	$\Delta KBA \backsim \Delta CIE$ $\Rightarrow \frac{KA}{CE} = \frac{KB}{CI}$ $CI = KI$ $CE = KE$ $\frac{KA}{KE} = \frac{KB}{KI}$  a, ΔABC vuông tại A, đường cao AH, áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có: AB^2 = BH. BC => 20^2 = BH.(BH +9) $\Leftrightarrow 400 = BH^2 + 9BH$ $\Leftrightarrow (BH-16).(BH+25) = 0$ =>BH =16 cm Từ đó tính được AH=12 cm; AC = 15cm	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu 4 **b**	, Chứng minh $\Delta IHE \backsim \Delta BHA$ Ta có: $\begin{cases} HI = IC = \frac{1}{2}AC \\ IF \perp HC \end{cases}$ =>IF là trung trực HC $E \in IF \Rightarrow EC = EH \Rightarrow \Delta IHE = \Delta ICE (c.c.c)$ $\Rightarrow \widehat{IHE} = \widehat{ICE} = 90^0$ (1) ta lại có : $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ (Cùng phụ góc HAC) $\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{IEH}$ (2) Từ (1) và (2) => $\Delta IHE \backsim \Delta BHA (g.g)$ => HA.HI=HB.HE	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
Câu 4 **c**	Gọi giao điểm AH, AE với BI theo thứ tự là G, K Từ câu b, $\Delta IHE \backsim \Delta BHA \Rightarrow \frac{IH}{BH} = \frac{EH}{AH} \Rightarrow \frac{IH}{EH} = \frac{BH}{AH}$ Mà $\widehat{IHE} = \widehat{BHA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IHE} + \widehat{AHI} = \widehat{BHA} + \widehat{AHI} \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{BHI} \Rightarrow$	**0,5**

	$\Delta BHI \sim \Delta AHE(c.g.c)$ Vì $\Delta BHI \sim \Delta AHE \Rightarrow \widehat{IBH}=\widehat{EAH} \Rightarrow \widehat{GBH}=\widehat{GAK}$ Xét $\Delta AKG, \Delta BHG$ có $\begin{cases}\widehat{GBH}=\widehat{GAK}(cmt)\\ \widehat{AGK}=\widehat{BGH}(cmt)\end{cases} \Rightarrow \widehat{AKG}=\widehat{BHG}=90^0 \Rightarrow AK \perp GK$ tại K $\Rightarrow AE \perp BI$	0,5 0,5 0,5
Câu 5	Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \ge a+b+c$	
	Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không b^2; 1 ta có: $b^2+1 \ge 2b$ $\frac{a+1}{b^2+1}=\frac{(a+1)(b^2+1-b^2)}{b^2+1}=\frac{(a+1)(b^2+1)}{b^2+1}-\frac{(a+1).b^2}{b^2+1}$; $\frac{1}{b^2+1} \le \frac{1}{2b}$ $=(a+1)-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1} \ge (a+1)-\frac{(a+1)b^2}{2b}=(a+1)-\frac{ab+b}{2}$ $\Rightarrow \frac{a+1}{b^2+1} \ge (a+1)-\frac{ab+b}{2}(1)$	0,5 0,25
	Tương tự: $\frac{b+1}{c^2+1} \ge (b+1)-\frac{bc+c}{2}$ (2) $\frac{c+1}{a^2+1} \ge (c+1)-\frac{ca+a}{2}$ (3) Cộng theo vế các bất đẳng (1),(2),(3) ta được: $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \ge (a+b+c)+3-\frac{ab+bc+ca+a+b+c}{2}$ $=6-\frac{ab+bc+ca+3}{2}$	0,5 0,25
	Mặt khác: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow ab+bc+ca \le 3$ Do đó $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \ge 6-3=3$	0,25