

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Câu 1 (2,0 điểm)**

1) Rút gọn biểu thức  $M = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$  với  $x > 1; x \neq 2$

2) Cho ba số a, b, c thỏa mãn  $\sqrt{a+b+c-5} + \sqrt{5(ab+bc+ca)-abc} = 0$

Tính giá trị của biểu thức:  $B = a^5 + b^5 + c^5$

**Câu 2 (3 điểm).**

1) Giải phương trình:  $x^2 - 20x + 24 + 8\sqrt{3(x-1)} = 0$

2) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x-y+1)(x+y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$

**Câu 3 (2,0 điểm) .**

1) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:  $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y = 4$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p để  $4p^2 + 1$  và  $6p^2 + 1$  cũng là số nguyên tố

**Câu 4 (3 điểm).**

1) Cho tam giác nhọn ABC có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên các đoạn thẳng HA, HB, HC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho  $\angle BMC = \angle CNA = \angle APB = 90^\circ$

a) Chứng minh tam giác ANP cân.

b) Gọi  $S, S_1, S_2$  lần lượt là diện tích các tam giác MBC, ABC và HBC. Chứng minh rằng:  $S = \sqrt{S_1 S_2}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của góc BAH cắt BH ở D. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Gọi E là giao điểm của MD và AH. Chứng minh rằng:  $AD \parallel CE$ .

**Câu 5 (1,0 điểm).**

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$  . Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{2}$$

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	1	$M = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ $= \frac{\sqrt{x-2\sqrt{(x-1)}} + \sqrt{x+2\sqrt{(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4x+4}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$ $= \frac{ \sqrt{x-1}-1  +  \sqrt{x-1}+1 }{ x-2 } \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$	0,25
		TH1: $x > 2$ $M = \frac{\sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1}+1}{x-2} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$	0,25
		TH2: $1 < x < 2$ $M = \frac{-\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}+1}{-(x-2)} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{-2}{x-1}$	0,25
2	2	$\sqrt{a+b+c-5} + \sqrt{5(ab+bc+ca)-abc} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-5=0(1) \\ 5(ab+bc+ca)-abc=0(2) \end{cases}$ Từ (1) $\Rightarrow a+b+c=5$ , thay vào (2) được: $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 - abc = 0$ $\Leftrightarrow (a^2b + a^2c + ab^2 + abc) + (b^2c + bc^2 + ac^2 + abc) = 0$ $\Leftrightarrow a(ab+ac+b^2+bc) + c(b^2+bc+ac+ab) = 0$ $\Leftrightarrow a(a+b)(b+c) + c(a+b)(b+c) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{cases}$	0,25
		T/h1: $a+b=0 \Rightarrow c=5 \Rightarrow B = (-b)^5 + b^5 + 5^5 = 5^5 = 3125$	
		T/h2: $b+c=0 \Rightarrow a=5 \Rightarrow B = 3125$	0,25
		T/h3: $a+c=0 \Rightarrow b=5 \Rightarrow B = 3125$	
2		Điều kiện $x \geq 1$ PT $\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - (12x - 12 - 8\sqrt{3x-3} + 4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = (2\sqrt{3x-3} - 2)^2$	0,25

1	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=2\sqrt{3x-3}-2 \\ x-4=2-2\sqrt{3x-3} \end{cases}$	
2	$PT: x-4=2\sqrt{3x-3}-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4(3x-3)=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-16x+16=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x=8+4\sqrt{3}$ $PT: x-4=2-2\sqrt{3x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2-24x+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=12-4\sqrt{6}$ <p style="text-align: center;">Vậy...</p>	0.25
	$\begin{cases} x^3-xy^2-(x-y+1)(x+y)=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x(x-y)(x+y)-(x-y+1)(x+y)=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases}$ $\hat{=} \begin{cases} (x+y)(x^2-xy-x+y-1)=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x+y=0 \\ x^2-xy-x+y+1=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases}$ $\hat{=} \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \quad (1) \\ x^2-xy-x+y-1=0 \quad (2) \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases}$	0.25
	<p>Giải hệ phương trình</p> $(1): \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x=-y \\ -2y^2-2y+1=0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	0.25
	<p>Giải hệ phương trình</p> $(2): \begin{cases} x^2-xy-x+y-1=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x^2-xy-(2y^2-1)-1=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases}$	0.25

		$\begin{cases} (x+y)(x-2y)=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ x-y=2y^2-1 \\ x=2y \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ x=2 \\ y=1 \\ x=-1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ <p>Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:</p> $(x; y) = \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right); \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right); (2; 1); \left( -1; -\frac{1}{2} \right)$	0,25
3	1	$x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y = 4$ Biến đổi phương trình $(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + 3y - 4 = 0$ $\Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 = -(x+y)^2 \Leftrightarrow (y+4)(y-1) = -(x+y)^2$ mà $-(x+y)^2 \leq 0 \Rightarrow (y+4)(y-1) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq y \leq 1$ mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$	0,25
		Các cặp số $(x; y)$ t/m là $(4; -4), (5; -3), (1; -3), (2; 0), (-2; 0), (-1; 1)$	0,25
		Do $p$ là số nguyên tố $\Rightarrow 4p^2 + 1 > 5$ và $6p^2 + 1 > 5$ Đặt $x = 4p^2 + 1 = 5p^2 - (p-1)(p+1)$ , $y = 6p^2 + 1 \Rightarrow 4y = 25p^2 - (p-2)(p+2)$	0,25
		- Nếu $p$ chia cho 5 dư 4 hoặc dư 1 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 5 $\Rightarrow x$ chia hết cho 5 mà $x > 5 \Rightarrow x$ không là số nguyên tố	0,25
	- Nếu $p$ chia cho 5 dư 3 hoặc dư 2 thì $(p-2)(p+2)$ chia hết cho 5 $\Rightarrow 4y$ chia hết cho 5 mà $(4; 5) = 1 \Rightarrow y$ chia hết cho 5 và $y > 5 \Rightarrow y$ không là số nguyên tố	0,25	
	Vậy $p$ chia hết cho 5, mà $p$ là số nguyên tố $\Rightarrow p = 5$ Thử vớip = 5 thì $x = 101$ ; $y = 151$ là các số nguyên tố	0,25	
4	1		
		a) Xét tam giác ANC vuông tại N có NE là đường cao nên $AN^2 = AE.AC$ (1)	0,25
		Xét tam giác APB vuông tại P có PF là đường cao nên $AP^2 = AF.AB$ (2)	0,25



	<p>CM: tam giác ABE đồng dạng với tam giác ACF (g-g) suy ra được: <math>AC.AE = AB.AF</math> (3)</p>	0.25
	<p>Từ (1), (2), (3) suy ra <math>AN^2=AP^2</math> suy ra <math>AN = AP</math> suy ra tam giác ANP cân tại A</p>	0.25
	<p>b) Xét tam giác MBC vuông tại M có MD là đường cao nên <math>MD^2 = BD.DC</math> (4)</p>	0.25
	<p>CM: tam giác BHD đồng dạng tam giác ACD suy ra: <math>\frac{DB}{DA} = \frac{HD}{CD} \Rightarrow DB.CD = AD.HD</math> (5) Từ (4) và (5) suy ra <math>MD^2 = AD.HD</math></p>	0.25
	<p>Ta có: <math>S = \frac{1}{2} BC.MD</math>; <math>S_1 = \frac{1}{2} BC.AD</math>; <math>S_2 = \frac{1}{2} BC.HD</math> Suy ra <math>S_1.S_2 = \frac{1}{2} BC.AD.\frac{1}{2} BC.HD = \frac{1}{4} BC^2 .AD.HD = \frac{1}{4} BC^2 .MD^2</math>.</p>	0.25
	<p>Suy ra <math>\sqrt{S_1.S_2} = \frac{1}{2} BC.MD = S</math></p>	0.25
2		
	<p>Gọi N là điểm đối xứng của D qua M Khi đó ADBN là hình bình hành suy ra <math>BD = AN, DH//NA</math> Xét tam giác EAN có: <math>DH//AN</math> nên <math>\frac{HE}{AE} = \frac{DH}{AN}</math></p>	0.25
	<p>Xét tam giác ABH, AD là phân giác suy ra <math>\frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BD}</math> CM: Tam giác HAB đồng dạng HCA suy ra: <math>\frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC}</math></p>	0.25
	<p>CM tam giác CAD cân tại C suy ra <math>CA = CD</math> <math>\frac{HE}{AE} = \frac{DH}{AN} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \frac{HE}{AE - HE} = \frac{CH}{CD - CH} \Rightarrow \frac{HE}{AH} = \frac{CH}{HD}</math></p>	0.25
	<p>Suy ra tam giác HEC đồng dạng tam giác HAD <math>\Rightarrow HEC = HAD \Rightarrow AD // CE</math></p>	0.25
	<p>Chứng minh bất đẳng thức phụ <math>(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)</math> (*) Với x, y là các số dương. Dấu “=” khi x = y</p>	0.25

	<p>Tacó áp dụng BĐT (*)</p> $\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{ab}{9} \left( \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right)$ $= \frac{1}{9} \left( \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2} \right) \quad (1)$ $\frac{bc}{2a+b+3c} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{b}{2} \right) \quad (2)$ $\frac{ac}{3a+2b+c} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} + \frac{c}{2} \right) \quad (3)$	<b>0,25</b>
	<p>Từ (1) (2) (3)</p> $P \leq \frac{1}{9} \left( \frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{bc+ab}{a+c} + \frac{a+b+c}{2} \right) = \frac{a+b+c}{6}$ <p>Mặt khác chứng minh được: <math>(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)</math></p> $\Leftrightarrow a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \leq 3$	<b>0,25</b>
	<p>Do đó <math>P \leq \frac{1}{2}</math>. Dấu “=” xảy ra khi <math>a = b = c = 1</math>.</p>	<b>0,25</b>