

Bài 1. (5,0 điểm): Cho biểu thức: $A = \frac{2xy}{y^2-x^2} : \left(\frac{1}{y^2-x^2} + \frac{1}{y^2+2xy+x^2} \right)$
với $x \neq \pm y; y \neq 0$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Cho x, y là các số thực thoả mãn $2(x^2 + x - y) + y^2 = xy$

Hãy tìm tất cả các giá trị của x, y để biểu thức A có giá trị là số nguyên dương.

Bài 2. (4,0 điểm):

1) Giải phương trình $x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16 = 0$

2) Cho a và b là các số tự nhiên thoả mãn $2022a^2 + a = 2023b^2 + b$. Chứng minh rằng $a - b$ là một số chính phương?

Bài 3. (4,0 điểm):

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn: $1 + x + x^2 = y^2$.

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên thoả mãn $a^5 + b^5 = 4(c^5 + d^5)$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 5.

Bài 4. (6,0 điểm):

1) Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn AC. Tia Dx cắt các cạnh AC, BC và đường thẳng AB lần lượt tại I, M, N. Vẽ CE vuông góc với đường thẳng AB tại E, CF vuông góc với đường thẳng AD tại F, BG vuông góc với đoạn thẳng AC tại G. Gọi K là điểm đối xứng với điểm D qua I.

a) Chứng minh rằng $ID^2 = IM \cdot IN$

b) Chứng minh rằng $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

c) Chứng minh rằng $KM \cdot DN = KN \cdot DM$

2) Cho hình thoi ABCD có $\widehat{ADC} = 120^\circ$. Kẻ tia Dx cắt cạnh BC tại điểm M và cắt đường thẳng AB tại điểm N sao cho $\widehat{CDx} = 15^\circ$. Kẻ tia Dy cắt cạnh AB tại điểm Q sao cho

$\widehat{ADy} = 15^\circ$. Chứng minh rằng $\frac{1}{DM^2} + \frac{1}{DN^2} = \frac{4}{3DA^2}$

Bài 5. (1,0 điểm): Cho ba số thực x, y, z dương thoả mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{z(z^2+x^2)} + \frac{y^2}{x(x^2+y^2)} + \frac{z^2}{y(y^2+z^2)} \geq \frac{3}{2}$