

Câu I. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{4x-8} + \sqrt{x-1} + \sqrt{4x-8}}{\sqrt{x^2 - 8(x-2)}} \cdot \left(1 - \frac{2}{x-2}\right)$

Rút gọn biểu thức A. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 2025$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2024}{2025}$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Câu II. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 2x^2 - 9x + 6$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ y^2 + x = 2 \end{cases}$

Câu III. (4,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3} + 2 = \sqrt{xy}$.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $9^n + 11$ là tích của k ($k \in \mathbb{N}; k \geq 2$) là số tự nhiên liên tiếp.

Câu IV. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao của AI và DE.

1. Chứng minh tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

2. Gọi K là trung điểm của AB, O là trung điểm của BC. Gọi M là giao của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh ba điểm K, O, S thẳng hàng và $AM = AN$.

3. Gọi P, Q là giao của FD với AI và CI. J là trung điểm của AC. Chứng minh rằng bốn điểm A, Q, P, C cùng nằm trên một đường tròn.

Câu V. (2,0 điểm) Cho 3 số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{z} + \frac{\sqrt{y} + \sqrt{z}}{x} + \frac{\sqrt{z} + \sqrt{x}}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt{z}}$$