

Ngày thi : Thứ Ba 27/9/2022

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm giới hạn

$$\lim \frac{1}{\ln n} \left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \dots + \frac{u_n}{n} \right).$$

Bài 2. (5 điểm)

- Tìm tất cả các số nguyên dương x thỏa $x^2 - x = 2^x - 2$.
- Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa $x > y > 2$ và $x^y - x = y^x - y$.

Bài 3. (5 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định (BC không đi qua O), A là điểm thay đổi trên cung lớn \widehat{BC} . Gọi I, M, N là trung điểm của BC, CA và AB . Đường tròn qua M , tiếp xúc BC tại B và đường tròn qua N , tiếp xúc BC tại C lần lượt cắt IM và IN tại E và F . Gọi D là giao điểm của BE, CF .

- Chứng minh AD đi qua một điểm cố định.
- Gọi K là giao điểm của AD với EF . Chứng minh K thuộc một đường tròn cố định.

Bài 4. (5 điểm) Với n nguyên dương, một tập hợp $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ gồm các số nguyên dương được gọi là “tốt” nếu tồn tại n tập hợp C_1, C_2, \dots, C_n thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, các tập hợp C_i gồm b_i số nguyên liên tiếp.
 - Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nếu đặt a_i là tổng tất cả các phần tử của C_i thì $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$.
- Chứng minh rằng nếu B chứa ít nhất một số lẻ thì B là tập hợp tốt.
 - Hỏi có bao nhiêu tập con khác rỗng của $\{1, 2, \dots, 100\}$ là tập tốt?

-----HẾT-----