UBND TỈNH THÁI NGUYÊN	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG**
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2022 - 2023**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn: TOÁN**
(Đề thi có 01 trang)	*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu 1. *(5,0 điểm)* Gọi $\mathscr{T}$ là tập tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x+mf(y))-x=f(2023f(y))\quad \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (m \text{ là tham số thực}).$$

Chứng minh rằng $\mathscr{T}$ khác rỗng khi và chỉ khi $m=2023$.

Câu 2. *(5,0 điểm)* Cho x,y là các số nguyên dương lớn hơn 2 và $A=y\left(4y+\frac{5}{x}\right)-\frac{1}{y}+x$. Biết rằng A là một số nguyên dương. Chứng minh rằng A là số chính phương.

Câu 3. *(3,0 điểm)* Cho a,b,c,n là các số nguyên dương và a,b,c không vượt quá n. Giả sử phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $|x_1-x_2|\le\frac{1}{n}$. Chứng minh rằng n có ít nhất hai ước số là số nguyên tố.

Câu 4. *(5,0 điểm)* Cho tam giác nhọn không cân ABC, (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi D,E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC,CA,AB. Gọi A',B',C' lần lượt là điểm đối xứng của A,B,C qua EF,FD,DE. K là trực tâm của tam giác DEF.

a) Chứng minh rằng các tam giác $DEF,A'B'C'$ có diện tích bằng nhau.

b) Giả sử ba đường thẳng DA',EB',FC' đôi một cắt nhau tạo thành tam giác XYZ. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác XYZ là trung điểm của KI.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho dãy số nguyên dương (u_n) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) $u_n<u_{n+1}$ với mọi $n\ge 1$.

(2) $u_a-u_b>u_c-u_d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương thoả mãn $1\le a<b\le c<d$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của u_{2023}.

———————Hết———————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..*SBD:*..