SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 1 trang, gồm 4 bài)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **180 phút** (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ nhất: **22/9/2022**

Bài 1. (*5 điểm*). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2 < 2n, \forall n$.

Bài 2. (*5 điểm*). Cho trước $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a^2 + b^2$ là tích của các số nguyên tố phân biệt, và mỗi số nguyên tố đó đều có dạng $8k - 3$, $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Giả sử tồn tại $p = 8l - 3$ $(l \in \mathbb{N}^*)$ là một ước nguyên tố của $a^4 + b^4$. Chứng minh rằng p là ước của cả a và b.

b) Tìm tất cả các cặp (m, n) với $m, n \in \mathbb{Z}$ mà $am + bn$ và $an - bm$ là các số chính phương.

Bài 3. (*5 điểm*). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt BC tại D và cắt lại (O) tại M. Đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt đường thẳng BC tại K. Các đường thẳng KA, KM cắt lại (O) lần lượt tại E, F. Các đường thẳng FI, FD cắt lại (O) lần lượt tại N, P.

a) Chứng minh rằng MN là trung trực của EP.

b) Gọi L là giao điểm của EF và AM. Chứng minh rằng KL vuông góc với OI.

Bài 4. (*5 điểm*). Với mỗi cặp số nguyên dương $(m; n)$, giả sử ban đầu có $m + n$ hộp được đánh số từ 1 đến $m + n$, trong đó m hộp đầu tiên mỗi hộp chứa 1 bi đen và n hộp còn lại mỗi hộp chứa 1 bi trắng.

Trong mỗi bước, ta được quyền chuyển một bi đen từ hộp i sang hộp $i + 1$ và một bi trắng từ hộp j sang hộp $j - 1$ với điều kiện $i - j$ là một số chẵn. Ở đây giả sử rằng mỗi hộp đều đủ lớn để có thể chứa toàn bộ số bi.

Cặp số $(m; n)$ được gọi là **tốt** nếu sau hữu hạn bước chuyển thì n hộp đầu tiên mỗi hộp chứa 1 bi trắng và m hộp còn lại mỗi hộp chứa 1 bi đen. Nếu trái lại thì ta nói $(m; n)$ là cặp **xấu**.

a) Chứng minh rằng cặp $(1; 2021)$ là cặp **xấu**.

b) Tìm số cặp số nguyên dương $(m; n)$ **tốt** trong mỗi trường hợp $m + n = 2022$ và $m + n = 2023$.

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 1 trang, gồm 4 bài)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian làm bài: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ hai: **23/9/2022**

Bài 5. *(6 điểm)*.

Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(xf\left(x+y\right)\right)=f\left(yf\left(x\right)\right)+x^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng f là đơn ánh.

b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện trên.

Bài 6. *(7 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AH. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng BC cắt (AOI) tại D khác I. Lấy E trên đường thẳng AC sao cho DE vuông góc với AC. Lấy F sao cho HF song song với AB và HF vuông góc với DF.

a) Chứng minh rằng (HEF) đi qua trung điểm AH.

b) Gọi AH cắt DF tại M, BM cắt DE tại N. Chứng minh rằng DO đi qua trung điểm MN.

Bài 7. *(7 điểm)*

An và Bình đến cửa hàng mua kẹo. Trong cửa hàng có các túi kẹo loại 1 chiếc, 2 chiếc, 4 chiếc, …, 2^{30} chiếc. Mỗi loại có nhiều túi. Mỗi bạn chọn mua một số túi ở nhiều loại và mỗi loại có thể mua nhiều túi.

a) Số túi ít nhất An cần phải mua để có đúng 1000 chiếc kẹo là bao nhiêu?

b) Có bao nhiêu cách chọn 5 túi kẹo đôi một khác loại sao cho tổng số chiếc kẹo được chọn không vượt quá 2023 và nếu túi loại 2^n được chọn ($n\in\mathbb{N}$, $n\le 29$) thì túi loại 2^{n+1} không được chọn?

c) Giả sử sau khi mua, An và Bình lần lượt có n và $n+1$ ($n\in\mathbb{N}$, $0\le n\le 2023$) chiếc kẹo, đồng thời An có nhiều hơn Bình 7 túi kẹo. Có bao nhiêu giá trị n thỏa mãn các điều kiện trên, biết An và Bình luôn mua ít túi nhất có thể?

HẾT