

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m+4)x + 2022$ đồng biến trên \mathbb{R} .

2. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có n con cá ($n < 12$) thì khối lượng trung bình mỗi con cá sau một vụ thu hoạch bằng $60n - 5n^2$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích mặt hồ để thu được khối lượng cá lớn nhất?

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh trong một nhóm gồm 6 nam và 4 nữ để làm trực nhật. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn có nhiều nhất 3 học sinh nam.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f(7) = 16f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $4f(x-1) - f(x+2) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[2; 5]$.

Câu 3. (5,5 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

a. Chứng minh rằng $SA \perp (SBC)$.

b. Biết góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

2. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: $2(\cos 2A + \cos 2B) + 7 = 4(\cos A + \sqrt{2} \cos B)$. Tính số đo góc C .

Câu 4. (3,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2x+5)\sqrt{x+1} + (2y-7)\sqrt{2-y} = 0 \\ \sqrt{2y^2+x+2} = y^2 - x^2 + x + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức:
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4u_n + 9), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng dãy số (u_n) tăng và không bị chặn trên.

b. Đặt $S_n = \frac{1}{u_1-1} + \frac{1}{u_2-1} + \dots + \frac{1}{u_n-1}$. Tính $\lim S_n$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $6xyz = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

1. Chứng minh rằng $\frac{1}{y} + \frac{2}{x} \leq 3$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 10x + 6y + 2z + \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$.

----- **HẾT** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.