PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
ĐỨC THỌ	**NĂM HỌC 2022 – 2023**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn: TOÁN 9**
	Thời gian: 120 phút
	Ngày thi: 15/09/2022

***Lời giải*: Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ**

Bài 1. a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2=2$

Tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{a^4+8b^2}+\sqrt{b^4+8a^2}$

c) Phân tích đa thức $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$ thành nhân tử

Lời giải. a) Ta có $A=\sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}=\left|\sqrt{7}+1\right|-\left|\sqrt{7}-1\right|=2$

b) Ta có $P=\sqrt{a^4+8(2-a^2)}+\sqrt{b^4+8(2-b^2)}=\sqrt{(a^2-4)^2}+\sqrt{(b^2-4)^2}$

$=\left|a^2-4\right|+\left|b^2-4\right|$. Vì $a^2+b^2=2\Leftrightarrow a^2-4=-(2+b^2)<0$ và $b^2-4<0$

Do đó $P=8-(a^2+b^2)=6$

c) Ta có $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$

$=(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=(x^2+2x+1)^2=(x+1)^4$

Bài 2. a) Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Biết rằng $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh rằng 2a, 2b có giá trị nguyên.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x>y>0$ và $x^3+7y=y^3+7x$

Lời giải. a) Ta có $\begin{cases}f(0)=c\\f(1)=a+b+c\\f(2)=4a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=f(1)-f(0)\\4a+2b=f(2)-f(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+4b=4f(1)-4f(0)\\4a+2b=f(2)-f(0)\end{cases}$

$\Rightarrow 2b=4f(1)-3f(0)-f(2)$ là số nguyên. Lại có $\begin{cases}2a+2b=2f(1)-2f(0)\\4a+2b=f(2)-f(0)\end{cases}$

$\Rightarrow 2a=f(2)-2f(1)+f(0)$ là số nguyên (Do $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ có giá trị nguyên)

b) Ta có $x^3+7y=y^3+7x\Leftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2)-7(x-y)=0$

$\Leftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2-7)=0\Leftrightarrow x^2+xy+y^2-7=0\Leftrightarrow 7-3xy=(x-y)^2>0$ (Vì $x>y>0$)

$\Rightarrow 7-3xy>0\Leftrightarrow 1\le xy\le 2$ (vì x, y nguyên dương)

Xét $xy=1\Leftrightarrow x=y=1$ (loại, vì $x>y$)

Xét $xy=2\Rightarrow(x;y)=(2;1)$ (thỏa mãn). Vậy $(x;y)=(2;1)$ thỏa mãn bài toán

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$

b) $(2x+3)^3+(3x-5)^3=(5x-2)^3-(5x-2)(17x^2+2020x-2067)$

Lời giải. a) Ta thấy $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\neq 0$; $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\neq 0$

Phương trình tương đương $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}-\dfrac{2}{3}=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2x)\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x+3}\right)=0$. Vì $\dfrac{1}{x^2+2x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x+3}>0$

Do đó $x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{-2;0\}$

b) Với số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ thì $(a+b)^3=-c^3\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$. Ta có phương trình tương đương

$(2x+3)^3+(3x-5)^3+(2-5x)^3=-(5x-2)(17x^2+2020x-2067)$. Nhận thấy

$(2x+3)+(3x-5)+(2-5x)=0\Rightarrow (2x+3)^3+(3x-5)^3+(2-5x)^3=3(2x+3)(3x-5)(2-5x)$

Phương trình tương đương $3(2x+3)(3x-5)(2-5x)-(2-5x)(17x^2+2020x-2067)=0$

$\Leftrightarrow (2-5x)(x^2-2023x+2022)=0\Leftrightarrow (2-5x)(x-1)(x-2022)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5};x=1;x=2022$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{2}{3};1;2022\right\}$

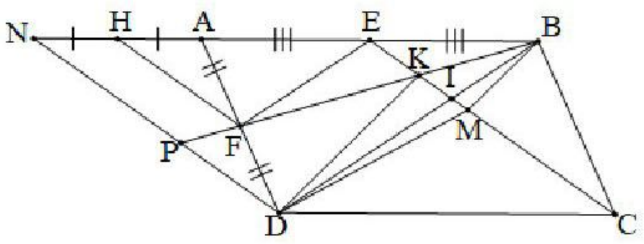
Bài 4. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD của hình bình hành ABCD. Các đoạn thẳng CE và BF cắt nhau tại K. Qua điểm D kẻ đường thẳng song song với CE cắt đường thẳng AB tại N. Tia BF cắt DN tại P.

a) Chứng minh rằng $BE=\dfrac{1}{2}EN$ và $KP=2BK$

b) Chứng minh rằng $\dfrac{KF}{KP}=\dfrac{3}{4}$

c) Lấy điểm M thuộc đoạn CE sao cho BM song song với KD. Chứng minh rằng diện tích tam giác KFD bằng diện tích tứ giác BKDM.

Lời giải.



a) Ta có CE // DN; CD // EN nên tứ giác CDNE là hình bình hành

$\Rightarrow EN=CD=AB=2BE$ hay $BE=\dfrac{1}{2}EN$

$\Rightarrow BE=EA=AN$. Áp dụng định lí Thales ta có KE // PN nên $\dfrac{KP}{BK}=\dfrac{EN}{EB}=2\Rightarrow KP=2BK$

b) Gọi H là trung điểm của AN, vì F là trung điểm của AD nên HF là đường trung bình của $\Delta AND\Rightarrow HF$ // NP. Áp dụng định lí Thales ta có

HF // KE nên $\dfrac{KF}{BK}=\dfrac{HE}{EB}=\dfrac{3}{2}$ (1), EK // NP nên $\dfrac{BK}{KP}=\dfrac{EB}{EN}=\dfrac{1}{2}$ (2).

Nhân (1) với (2) theo vế, ta có $\frac{KF}{KP}=\frac{3}{4}$

c) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Áp dụng định lí Thales ta có CE // DN nên $\frac{IB}{ID}=\frac{EB}{EN}=\frac{1}{2}$

DK // BM nên $\frac{MB}{KD}=\frac{IB}{ID}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{S_{DBM}}{S_{DBK}}=\frac{MB}{KD}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{DBM}=\frac{S_{DBK}}{2}\Rightarrow S_{BKDM}=S_{DBM}+S_{DBK}=\frac{3S_{DBK}}{2}$ (3)

Mặt khác $\frac{KF}{BK}=\frac{HE}{EB}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{S_{KFD}}{S_{DBK}}=\frac{KF}{BK}=\frac{3}{2}\Rightarrow S_{KFD}=\frac{3S_{DBK}}{2}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra diện tích tam giác KFD bằng diện tích tứ giác BKDM.

Bài 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$

Lời giải. Ta dễ dàng chứng minh được $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$.

Thật vậy $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge 0\Leftrightarrow (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]\ge 0$ đúng với mọi a, b

Chứng minh tương tự ta cũng có $b^4+c^4\ge b^3c+bc^3$ và $c^4+a^4\ge c^3a+ca^3$.

Do đó $3(a^4+b^4+c^4)\ge(a^4+b^4)+(b^4+c^4)+(c^4+a^4)+(a^4+b^4+c^4)$

$\ge a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3+a^4+b^4+c^4=a^3(a+b+c)+b^3(a+b+c)+c^3(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)=3(a^3+b^3+c^3)\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1