TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI – AMSTERDAM TỔ TOÁN – TIN HỌC	ĐỀ KIỂM TRA CHỌN ĐỘI TUYỂN THAM GIA KỲ THI HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ HÀ NỘI MÔN TOÁN LỚP 12. NĂM HỌC 2022-2023. *Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu I. (4.5 điểm)

Cho đường cong (C) có phương trình $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 2022$.

Với mỗi điểm M thuộc (C), gọi d_M là tiếp tuyến của đường cong (C) tại M. Trên (C), lấy điểm M_1 có hoành độ $x_{M_1} = 2022$. Từ điểm M_1 ta xây dựng các điểm $M_2, M_3, ..., M_n$ theo quy tắc: điểm M_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1, n \in N, n \geq 2)$ là điểm chung thứ hai của d_{M_i} (d_{M_i} là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_i) với đường cong (C). Gọi $x_{M_2}, x_{M_3}, ..., x_{M_n}$ theo thứ tự là hoành độ của các điểm $M_2, M_3, ..., M_n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $(f(x_{M_n}) + x_{M_n} + 2021) \vdots 2^{2022}$.

Câu II. (5 điểm)

a) Giải phương trình sau trên tập số thực: $2\sqrt[3]{6x+\sqrt{2}} = 8x^3 - 2x - \sqrt{2}$.

b) Chứng minh rằng phương trình $x^{2022} + x^{-2022} = 1 + x$ có một nghiệm thực $x \in \left(1; 1 + \frac{1}{2022}\right)$.

Câu III. (2.5 điểm)

Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ $(n \geq 0)$ được xác định như sau: $u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = u_n + \frac{2022}{v_n}$ và $v_{n+1} = v_n + \frac{2022}{u_n}$ với $\forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $\max(u_{2022}, v_{2022}) \geq 2859,5$.

Câu IV. (6 điểm)

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các đoạn thẳng BD, AB' lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với các đỉnh của hình lập phương sao cho $BM = B'N$. Gọi α, β theo thứ tự là số đo góc tạo bởi đường thẳng MN với các đường thẳng BD, AB'.

a) Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{1}{2}$.

b) Xác định vị trí của các điểm M, N sao cho độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất. Khi đó MN có phải đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và AB' không?

c) Giả sử các điểm H, K, L (khác điểm A) theo thứ tự di động trên các tia AB, AD, AA' thỏa mãn $\frac{1}{AH} + \frac{2}{AK} + \frac{3}{AL} = \frac{2}{AB}$. Chứng minh rằng mặt phẳng (HKL) luôn đi qua một điểm cố định khi H, K, L di động thỏa mãn điều kiện trên.

Câu V. (2 điểm)

Một kỳ thi học sinh giỏi được diễn ra trong 2 ngày. Điểm đánh giá mỗi ngày dùng k $(k \geq 2)$ giá trị khác nhau (chẳng hạn với k = 2 thì đánh giá là "đạt" (tức là 1) hoặc "không đạt" (tức là 0); với k = 8 thì điểm số dùng để đánh giá là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7). Hãy xác định số nhiều nhất các học sinh dự thi sao cho có thể xảy ra trường hợp là trong k học sinh tùy ý, luôn có một ngày thi mà kết quả của k học sinh này đôi một khác nhau.

HẾT