

Bài 1. (5,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 4$ và

$$x_{n+1} = \frac{9}{\sqrt{x_n + 1} + 1}, \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương n , chứng minh rằng

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq 3.$$

Bài 2. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số thực không âm $(x; y; z)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x \leq y \leq z \\ x + y + z = xy + yz + zx \\ \sqrt{yz}(x + 1) = 2. \end{cases}$$

Bài 3. (4,0 điểm)

Cho p, q là các số nguyên tố và thỏa mãn: $q = 4p + 1$. Chứng minh rằng số

$$N_p = \frac{p^p - 1}{p - 1}$$

chia hết cho q .

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D . Gọi E, F tương ứng là giao điểm của đường thẳng OD với các đường thẳng AB, AC . Lấy các điểm K, H thuộc BC sao cho $EK \parallel AC, FH \parallel AB$. Gọi G là giao điểm của EK và FH .

a) Chứng minh rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác (GKH) tiếp xúc với (O) .

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF cắt AB, AC tương ứng tại các điểm thứ hai P, Q (P khác E, Q khác F). Chứng minh rằng, PQ đi qua trực tâm của tam giác ABC .

—————HẾT—————

Ghi chú:

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

Bài 5. (7,0 điểm)

Cho dãy đa thức $(P_n(x))$ xác định bởi: $P_0(x) = x^3 - 4x$ và

$$P_{n+1}(x) = P_n(1+x) \cdot P_n(1-x) - 1$$

với mọi số tự nhiên n , mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Tính $P_{2022}(2)$.

b) Chứng minh rằng, tồn tại một đa thức $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho

$$P_{2022}(x) = x^{2023} \cdot Q(x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6. (6,0 điểm)

Cho số nguyên $n \geq 2$. Xét m là một số nguyên dương sao cho tồn tại một tập hợp T thỏa mãn đồng thời các tính chất sau đây:

- Mỗi phần tử của T là một tập con m phần tử của tập $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$.
- Mỗi cặp phần tử của T có không quá 1 phần tử chung.
- Mỗi phần tử của tập $\{1, 2, 3, \dots, mn\}$ thuộc đúng hai phần tử của T .

Tìm giá trị lớn nhất có thể của m .

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt AB, AC tương ứng tại A_b, A_c ; đường tròn ngoại tiếp tam giác COA cắt BA, BC tương ứng tại B_a, B_c ; và đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB cắt CA, CB tương ứng tại C_a, C_b (các điểm $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ không trùng với các đỉnh của tam giác ABC). Các cặp đường thẳng $(B_c B_a, C_a C_b)$, $(C_a C_b, A_b A_c)$, $(A_b A_c, B_c B_a)$ lần lượt có các giao điểm là X, Y, Z . Chứng minh rằng

a) Các điểm O, B_a, C_a thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ tiếp xúc với (O) .

-----HẾT-----

Ghi chú:

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.