



ARCHIMEDES

HỆ THỐNG GIÁO DỤC ARCHIMEDES SCHOOL
ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN KHỐI 8

Môn Toán | Thời gian 135 phút

Bài 1 (2.0 điểm). Xét các số thực x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x + 18y - 52.$$

Bài 2 (2.0 điểm). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $13a + 10b + 5c = 1$. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{196}.$$

Bài 3 (2.0 điểm). Với mỗi số thực x khác -2 và -3 , đặt $f_1(x) = -\frac{3x+7}{x+2}$, $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = -\frac{3f_1(x)+7}{f_1(x)+2}$, $f_3(x) = f_1(f_2(x)) = -\frac{3f_2(x)+7}{f_2(x)+2}$, ... Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $f_{269}(x)$ là số nguyên.

Bài 4 (2.0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $16a^2 + 9b, 9b^2 + 7c$ và $4c^2 + 5a$ đều là số chính phương.

Bài 5 (2.0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) thỏa mãn $4pq - 3, 4(pq - 1)$ và $p + q$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài 6 (2.0 điểm). Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $ab = cd$. Chứng minh rằng $(a + c)^2 + (b + d)^2$ không thể là tích của ba số nguyên tố phân biệt.

Bài 7 (6.0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A , có $BC < BA$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BE và CF của tam giác ABC .

- Chứng minh tứ giác $BFEC$ là hình thang cân.
- Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng EF (M khác F và $MF < ME$). Đường trung trực của đoạn thẳng MF cắt đoạn thẳng AF tại điểm I . Đường trung trực của đoạn thẳng ME cắt đoạn thẳng AE tại điểm K . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AH . Chứng minh rằng $OI = OK$.
- Gọi N là giao điểm của các đường thẳng IK và CF . Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng HK .

Bài 8 (2.0 điểm). Trên bàn có 269 thẻ bài màu đỏ, 269 thẻ bài màu xanh và 269 thẻ bài màu tím. Mỗi bước, thầy Cấn chọn ba thẻ bài nào đó cùng màu ra khỏi bàn và thêm vào bàn một thẻ bài khác màu. Cụ thể, nếu ba thẻ bài thầy Cấn lấy ra khỏi bàn là màu đỏ thì thầy sẽ thêm vào bàn một thẻ bài màu xanh; nếu ba thẻ bài thầy Cấn lấy ra khỏi bàn là màu xanh thì thầy sẽ thêm vào bàn một thẻ bài màu tím; còn nếu ba thẻ bài thầy Cấn lấy ra khỏi bàn là màu tím thì thầy sẽ thêm vào bàn một thẻ bài màu đỏ. Thầy Cấn sẽ thực hiện quá trình làm sao để trên bàn còn lại mỗi màu không quá hai thẻ bài. Hỏi, khi đó trên bàn có bao nhiêu thẻ bài màu đỏ, bao nhiêu thẻ bài màu xanh, bao nhiêu thẻ bài màu tím?

----- HẾT -----