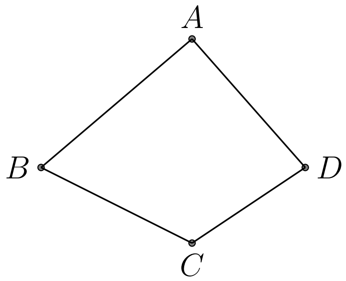
Chương 1

Tứ giác

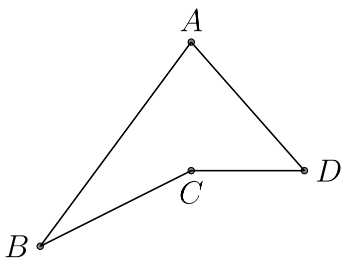
§1 Tứ giác

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 6. Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó, bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên cùng một đường thẳng.



a)



b)

- *Tứ giác lồi*: Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm về một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì một cạnh nào của tứ giác (hình b không phải tứ giác lồi).
- *Tổng các góc trong một tứ giác*: Tổng các góc trong một tứ giác bằng 360°.
- *Góc ngoài của tứ giác*: Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác.

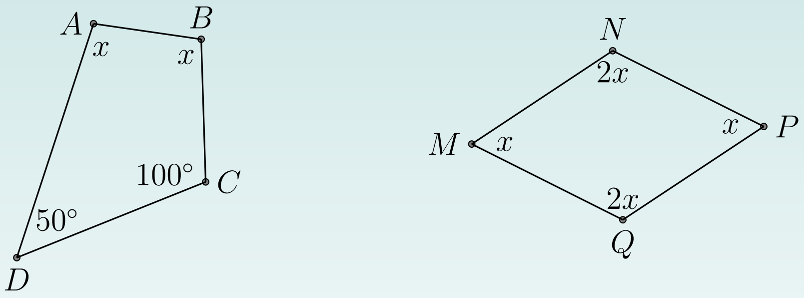
2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 1. Tính số đo góc

Dựa vào tính chất tổng các góc trong một tứ giác.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x trong hình vẽ.



a) b)

ĐS: a) 100°; b) 60°

Lời giải.

1. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

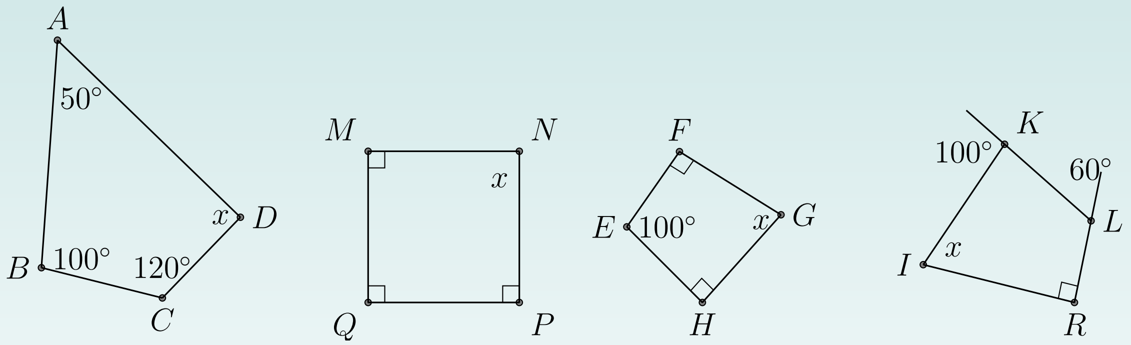
$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ \Rightarrow x+x+50^\circ+110^\circ=360^\circ \Rightarrow x=100^\circ.$$

2. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}+\widehat{Q}=360^\circ \Rightarrow x+2x+x+2x=360^\circ \Rightarrow 6x=360^\circ \Rightarrow x=60^\circ.$$

□

Ví dụ 2. Tìm x trong hình vẽ.



a) b) c) d)

ĐS: a) 90°; b) 90°; c) 80°; d) 70°

Lời giải.

1. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ \Rightarrow 50^\circ+100^\circ+120^\circ+x=360^\circ \Rightarrow x=90^\circ.$$

2. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}+\widehat{Q}=360^\circ \Rightarrow 90^\circ+90^\circ+90^\circ+x=360^\circ \Rightarrow 6x=360^\circ \Rightarrow x=90^\circ.$$

3. Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{E}+\widehat{F}+\widehat{G}+\widehat{H}=360^\circ \Rightarrow 100^\circ+90^\circ+90^\circ+x=360^\circ \Rightarrow x=80^\circ.$$

4. Vì góc ngoài tại K có số đo là 100° nên $\widehat{IKL}=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.
   Góc ngoài tại L có số đo là 60° nên $\widehat{KLR}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.
   Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\widehat{IKL}+\widehat{KLR}+\widehat{R}+\widehat{I}=360^\circ \Rightarrow 80^\circ+120^\circ+90^\circ+x=360^\circ \Rightarrow x=70^\circ.$$

□

Ví dụ 3. Tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{M}=65^\circ$, $\widehat{N}=117^\circ$, $\widehat{P}=71^\circ$. Tính số đo góc ngoài tại đỉnh Q.

Lời giải.

Xét tứ giác $MNPQ$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}+\widehat{Q} &= 360^\circ\\ 65^\circ+117^\circ+71^\circ+\widehat{Q} &= 360^\circ\\ 253^\circ+\widehat{Q} &= 360^\circ\\ \widehat{Q} &= 360^\circ-253^\circ\\ \widehat{Q} &= 107^\circ.\end{aligned}$$

Khi đó, góc ngoài tại đỉnh Q có số đo $180^\circ-107^\circ=73^\circ$. □

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ biết $\widehat{A}=75^\circ$, $\widehat{B}=90^\circ$, $\widehat{C}=120^\circ$. Tính số đo các góc ngoài của tứ giác $ABCD$.

Lời giải.

Xét tứ giác $ABCD$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D} &= 360^\circ\\ 75^\circ+90^\circ+120^\circ+\widehat{D} &= 360^\circ\\ 285^\circ+\widehat{D} &= 360^\circ\\ \widehat{D} &= 360^\circ-285^\circ\\ \widehat{D} &= 75^\circ.\end{aligned}$$

Khi đó, ta có

- Góc ngoài tại A có số đo là $180^\circ-75^\circ=105^\circ$.
- Góc ngoài tại B có số đo là $180^\circ-90^\circ=90^\circ$.
- Góc ngoài tại C có số đo là $180^\circ-120^\circ=60^\circ$.
- Góc ngoài tại D có số đo là $180^\circ-75^\circ=105^\circ$.

□

Dạng 2. Dạng toán chứng minh hình học

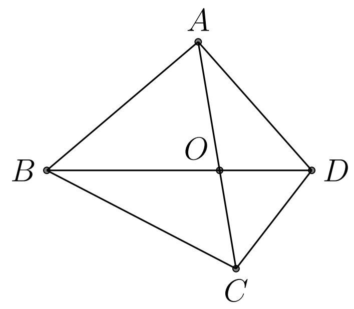
Vận dụng các kiến thức đã được học như bất đẳng thức tam giác, chu vi, đường trung trực của đoạn thẳng,...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh:

1. $AC + BD > AB + CD$;
2. $AC + BD > AD + BC$.

Lời giải.



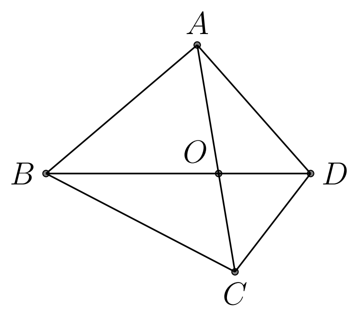
1. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có
   $OA + OB > AB$ ($\triangle OAB$);
   $OC + OD > CD$ ($\triangle OCD$);
   $\Rightarrow AC + BD > AB + CD$.
2. Tương tự trên, áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có
   $OA + OD > AD$ ($\triangle OAD$);
   $OB + OC > BC$ ($\triangle OCB$);
   $\Rightarrow AC + BD > AD + BC$.

$\square$

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi chu vi của tứ giác $ABCD$ là P_{ABCD}. Chứng minh:

1. $AC + BD > \dfrac{P_{ABCD}}{2}$;
2. Nếu $AC < \dfrac{P_{ABCD}}{2}$ thì $AC + BD < P_{ABCD}$.

Lời giải.



1. Theo kết quả bài trên, ta có
   $$AC + BD > AB + CD; AC + BD > AD + BC.$$
   Cộng vế với vế $AC + BD > \dfrac{P_{ABCD}}{2}$.
2. Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào các tam giác ABC, ACD: $AC < AB + BC$; $AC < AD + CD \Rightarrow AC < \dfrac{P_{ABCD}}{2}$.
   Tương tự $BD < \dfrac{P_{ABCD}}{2} \Rightarrow AC + BD < P_{ABCD}$.

$\square$

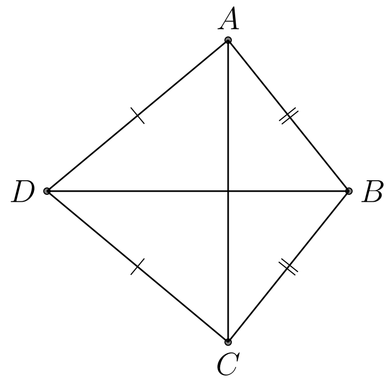
3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$; $CD = DA$.

1. Chứng minh BD là đường trung trực của AC;
2. Cho $\widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$. Tính $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$. **ĐS:** $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$

Lời giải.

1. Vì $AB = BC$ suy ra B thuộc đường trung trực của AC.
   Vì $DA = DC \Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của AC.
   $\Rightarrow BD$ là đường trung trực của AC.
2. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$ có $\begin{cases} AB = BC \\ AD = DC \\ BD \text{ cạnh chung} \end{cases}$
   $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CBD$ (c.c.c), suy ra $\widehat{A} = \widehat{C}$.
   Vậy $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$.



□

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$, biết rằng $\dfrac{\widehat{A}}{1} = \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{C}}{3} = \dfrac{\widehat{D}}{4}$. Tính các góc của tứ giác $ABCD$.
ĐS: $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 72^\circ$; $\widehat{C} = 108^\circ$, $\widehat{D} = 144^\circ$

Lời giải.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{\widehat{A}}{1} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{D}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{1+2+3+4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ.$$

Vậy $\widehat{A} = 36^\circ$, $\widehat{B} = 72^\circ$; $\widehat{C} = 108^\circ$, $\widehat{D} = 144^\circ$. □

Bài 3. Cho tứ giác $MNPQ$ có $\widehat{N} = \widehat{M} + 10^\circ$, $\widehat{P} = \widehat{N} + 10^\circ$, $\widehat{Q} = \widehat{P} + 10^\circ$. Hãy tính các góc của tứ giác $MNPQ$. **ĐS:** $\widehat{M} = 75^\circ$; $\widehat{N} = 85^\circ$; $\widehat{P} = 95^\circ$; $\widehat{Q} = 105^\circ$

Lời giải.

Ta có $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ$.
Thay $\widehat{N} = \widehat{M} + 10^\circ$, $\widehat{P} = \widehat{N} + 10^\circ = \widehat{M} + 20^\circ$, $\widehat{Q} = \widehat{P} + 10^\circ = \widehat{M} + 30^\circ$ vào biểu thức trên, ta được

$$\begin{aligned} & \widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \widehat{M} + \widehat{M} + 10^\circ + \widehat{M} + 20^\circ + \widehat{M} + 30^\circ = 360^\circ \\ \Leftrightarrow\ & 4\widehat{M} + 60^\circ = 360^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \widehat{M} = 75^\circ. \end{aligned}$$

Vậy $\widehat{M} = 75^\circ$; $\widehat{N} = 85^\circ$; $\widehat{P} = 95^\circ$; $\widehat{Q} = 105^\circ$. □

Bài 4. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} = 60^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$, $\widehat{A} - \widehat{B} = 10^\circ$. Tính số đo của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$. **ĐS:** $\widehat{A} = 115^\circ$, $\widehat{B} = 105^\circ$

Lời giải.

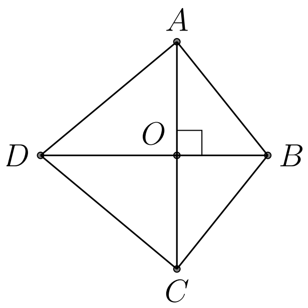
Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} = 360^\circ - \left(\widehat{C} + \widehat{D}\right) = 360^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 220^\circ$ mà $\widehat{A} - \widehat{B} = 10^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{A} = \dfrac{220^\circ + 10^\circ}{2} = 115^\circ$, $\widehat{B} = 220^\circ - 115^\circ = 105^\circ$. □

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O.

1. Chứng minh $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$;
2. Cho $AD = 5$ cm, $AB = 2$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài CD. **ĐS:** $CD = 11$ cm

Lời giải.



1. Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OAB, ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2$.
   Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OBC, ta có $BC^2 = OB^2 + OC^2$.
   Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OCD, ta có $CD^2 = OC^2 + OD^2$.
   Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OAD, ta được $AD^2 = OA^2 + OD^2$.
   $\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2\ (= OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)$
2. Theo câu trên, ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$
   $\Leftrightarrow 2^2 + CD^2 = 5^2 + 10^2 \Leftrightarrow CD^2 = 121 \Rightarrow CD = 11$.

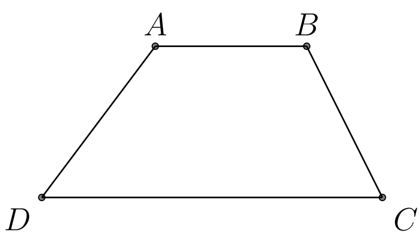
□

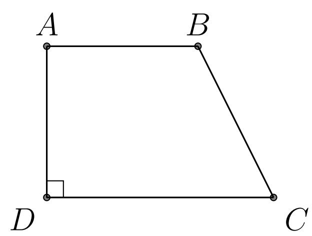
§2 Hình thang

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song (gọi là hai đáy).
- Trong hình thang, hai góc kề một cạnh bên bù nhau.
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.





1.2 Tính chất

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

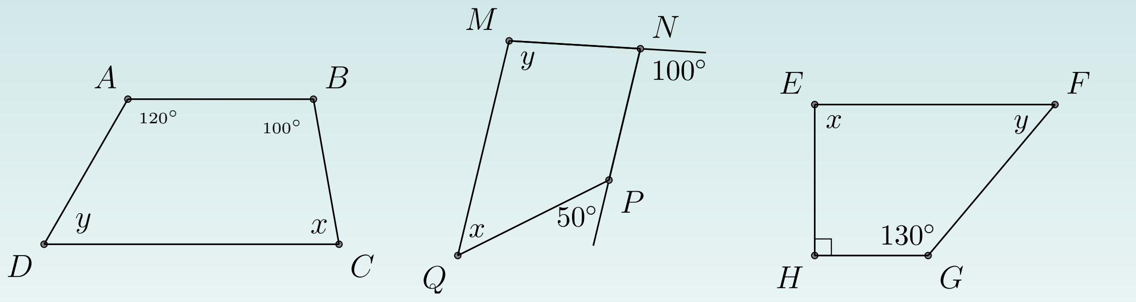
2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 3. Tính số đo góc của hình thang

Vận dụng tính chất hai góc kề một cạnh bên của hình thang thì bù nhau, hai góc so le trong, hai góc đồng vị, hai gó kề bù, tổng các góc trong một tứ giác...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x và y ở hình vẽ dưới biết các hình thang $ABCD$; $MNPQ$ và $EFGH$ có đáy lần lượt là AB và CD; NP và MQ; EF và GH.



a) b) c)

ĐS: a) $x = 80^\circ$, $y = 60^\circ$; b) $x = 50^\circ$, $y = 100^\circ$; c) $x = 90^\circ$, $y = 50^\circ$

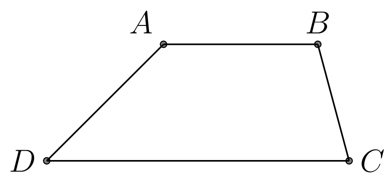
Lời giải.

- *Hình a).* Vì $AB \,/\!/\, CD$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ hay $\widehat{D} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = y = 60^\circ$.
  Tương tự, $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = x = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.
- *Hình b).* Ta có $\widehat{MNP} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.
  $\widehat{QPN} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
  Vì $MQ \,/\!/\, NP$ nên $\widehat{M} + \widehat{MNP} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M} = y = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.
  Tương tự, $\widehat{Q} + \widehat{QPN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{Q} = x = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.
- Hình c).:Vì $EF \,/\!/\, HG$ nên $\widehat{E} + \widehat{H} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{E} = x = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
  Tương tự $\widehat{F} + \widehat{G} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{F} = y = 180^\circ - \widehat{G} = 50^\circ$.

□

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD. Biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$ và $\widehat{A} = 3\widehat{D}$. Tính các góc của hình thang. **ĐS:** $\widehat{A} = 135^\circ$; $\widehat{B} = 105^\circ$; $\widehat{C} = 75^\circ$; $\widehat{D} = 45^\circ$

Lời giải.



Vì $AB \,/\!/\, CD$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ mà theo đề bài $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$
nên $\widehat{B} = \dfrac{180^\circ + 30^\circ}{2} = 105^\circ$,
$\widehat{C} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.
Vì $AB \,/\!/\, CD$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ mà $\widehat{A} = 3\widehat{D}$ nên
$\widehat{A} + \widehat{D} = 3\widehat{D} + \widehat{D} = 4\widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 45^\circ$, $\widehat{A} = 135^\circ$.

□

Dạng 4. Chứng minh tứ giác là hình thang

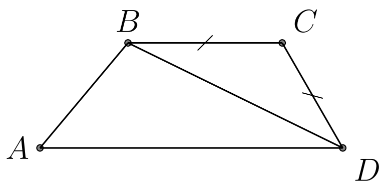
Dựa vào định nghĩa của hình thang, tính chất tam giác cân, phân giác của một góc, tam giác bằng nhau...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tứ giác $ABCD$ có $BC = CD$ và DB là phân giác của góc D. Chứng minh $ABCD$ là hình thang.

Lời giải.

Xét $\triangle BCD$ có $BC = CD$ nên $\triangle BCD$ cân tại C
suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{BDC}$ mà DB là phân giác của $\widehat{D}$
nên $\widehat{CDB} = \widehat{BDA}$.
Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{DBC} \left(= \widehat{CDB}\right)$ nên $BC \parallel AD$ hay $ABCD$ là hình thang.



□

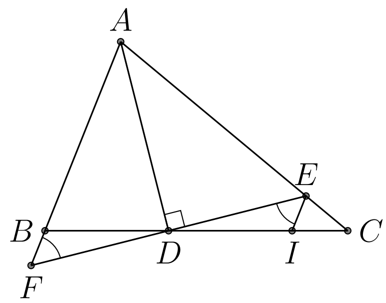
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, đường phân giác AD. Đường vuông góc với AD tại D cắt AB và AC lần lượt tại F và E. Trên cạnh DC lấy điểm I sao cho $DI = DB$. Chứng minh $AEIB$ là hình thang.

Lời giải.

AD là phân giác và là đường cao của $\triangle AEF$.
$\Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A.
$\Rightarrow AD$ là đường trung tuyến.
$\Rightarrow DE = DF$.

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle IDE$ có $\begin{cases} DI = DB \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{BDF} = \widehat{EDI} \text{ (đối đỉnh)} \\ DE = DF \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle BDF = \triangle IDE$.
$\Rightarrow \widehat{IED} = \widehat{DFB} \Rightarrow IE \parallel AB$.
$\Rightarrow AEIB$ là hình thang.



□

Dạng 5. Chứng minh các tính chất hình học

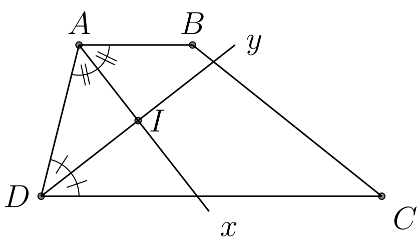
Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã được học như tính chất của hình thang, tia phân giác của một góc, tam giác cân, bất đẳng thức tam giác,...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết Ax, Dy lần lượt là phân giác của $\widehat{A}$, $\widehat{D}$ của hình thang. Chứng minh $Ax \perp Dy$.

Lời giải.

Gọi $I = Ax \cap Dy$.
Vì $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{IAD} + \widehat{IDA} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ$
$Ax \perp Dy$.

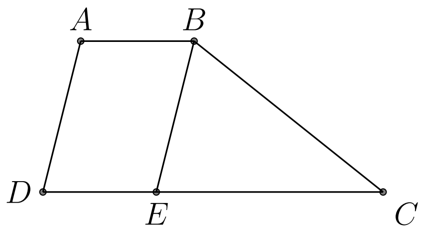


□

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt CD tại E. Chứng minh

1. $AD = BE$, $AB = DE$;
2. $CD - AB = CE$;
3. $BC + AD > CD - AB$.

Lời giải.



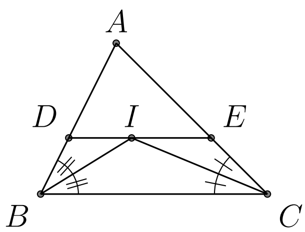
1. Hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên $AD \parallel BE$
   $\Rightarrow AD = BE$; $AB = DE$.
2. Ta có $CD - AB = CD - DE = CE$.
3. Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho $\triangle BCD$
   $BC + BE > CE$.
   Mà $BE = AD$, $CE = CD - AB$ nên
   $BC + AD > CD - AB$.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của B và C cắt nhau ở I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC ở D và E.

1. Tìm các hình thang trong hình vẽ.
2. Chứng minh $\triangle BDI$ và $\triangle IEC$ là các tam giác cân.
3. Chứng minh $DE = BD + CE$.

Lời giải.



1. Các hình thang trong hình vẽ là $BCED$, $BDIC$, $BIEC$.
2. $\widehat{DBI} = \widehat{DIB} \left(= \widehat{IBC}\right)$ nên $\triangle BDI$ cân tại D.
   Tương tự $\triangle CEI$ cân tại E.
3. $DE = ID + IE = BD + CE$.

□

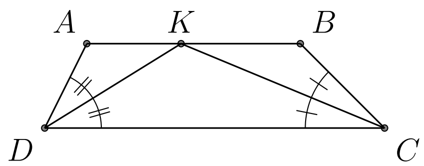
Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Hai tia phân giác của góc C và D cắt nhau tại K thuộc đáy AB. Chứng minh

1. $\triangle ADK$ cân ở A, $\triangle BKC$ cân ở B;
2. $AB = AD + BC$.

Lời giải.

1. Vì $\widehat{AKD} = \widehat{KDC}$ (hai góc so le trong). (1)

DK là tia phân giác của $\widehat{ADC}$ nên $\widehat{ADK} = \widehat{KDC}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADK} = \widehat{AKD}$ hay $\triangle ADK$ cân tại A.
Tương tự $\widehat{BKC} = \widehat{KCD}$ (hai góc so le trong) mà $\widehat{KCB} = \widehat{KCD}$ nên $\widehat{BKC} = \widehat{KCB}$ hay $\triangle KBC$ cân tại B.



2. $\triangle AKD$ cân tại A nên $AK = AD$.
   $\triangle KBC$ cân tại B nên $BK = BC$.
   Vậy $AB = AK + KB = AD + BC$.

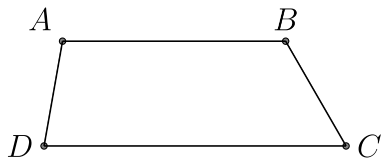
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính các góc của hình thang. **ĐS:** $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{B} = 120^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thang nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ mà $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$ nên ta tìm được $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$.
Tương tự, ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ nên tìm được $\widehat{B} = 120^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$.



□

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ ($BC \parallel AD$) có $\widehat{C} = 3\widehat{D}$. Tính số đo $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$. **ĐS:** $\widehat{D} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$

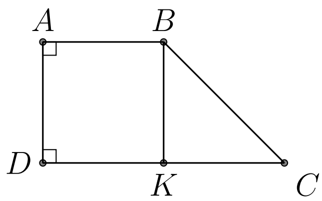
Lời giải.

Ta có $BC \parallel AD$ nên $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$ mà $\widehat{C} = 3\widehat{D}$ nên $3\widehat{D} + \widehat{D} = 4\widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 45^\circ$.
Vậy $\widehat{D} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$. □

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 2$ cm, $DC = 4$ cm. Tính các góc của hình thang. **ĐS:** $\widehat{C} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 135^\circ$

Lời giải.

Kẻ $BK \perp CD$ ($K \in CD$).
$ABKD$ là hình thang có hai cạnh bên $AD \parallel BK$ nên suy ra $AD = BK = 2$ cm.
$DK = AB = 2$ cm, suy ra $CK = 2$ cm.
Khi đó $\triangle BCK$ vuông cân tại $K \Rightarrow \widehat{C} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$.

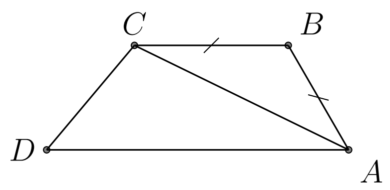


□

Bài 4. Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$ và AC là phân giác của $\widehat{A}$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ có $AB = BC$ nên $\triangle ABC$ cân tại B suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{CAB}$ mà AC là phân giác của $\widehat{A}$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$. Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{CAD}\left(= \widehat{BAC}\right)$ và hai góc này ở vị trí so le trong nên $BC \parallel AD$ hay $ABCD$ là hình thang.



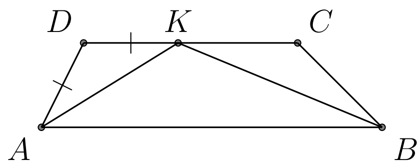
□

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $CD = AD + BC$. Gọi K là điểm thuộc đáy CD sao cho $KD = AD$. Chứng minh

1. AK là phân giác của $\widehat{A}$;
2. $KC = BC$;
3. BK là phân giác của $\widehat{B}$.

Lời giải.

1. Ta có $DK = DA$ nên $\triangle ADK$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{DKA}$.
   Vì $CD \parallel AB$ nên $\widehat{DKA} = \widehat{KAB}$ (hai góc so le trong).
   Vậy $\widehat{DAK} = \widehat{KAB}\left(= \widehat{DKA}\right)$ hay AK là phân giác của $\widehat{A}$.



2. Vì $CD = AD + BC = KD + KC$ mà $AD = DK$ nên $KC = BC$.
3. Ta có $CK = CB$ nên $\triangle CKB$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CKB} = \widehat{CBK}$.
   Vì $CD \parallel AB$ nên $\widehat{CKB} = \widehat{KBA}$ (hai góc so le trong).
   Vậy $\widehat{CBK} = \widehat{KBA}\left(= \widehat{CKB}\right)$ hay BK là phân giác của $\widehat{B}$.

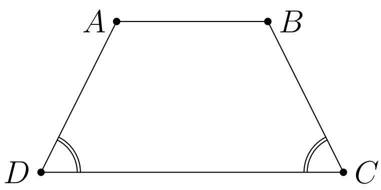
□

§3 Hình thang cân

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 7. Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
Cạnh đáy có độ dài lớn hơn được gọi là đáy lớn.



1.2 Tính chất

Định lí 1. Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

Định lí 2. Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Định lí 3. Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

1.3 Dấu hiệu nhận biết

- ☑ Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- ☑ Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

⚠ **16.** Lưu ý: Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau không sử dụng làm dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 6. Tính số đo các góc, chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các góc bằng nhau.

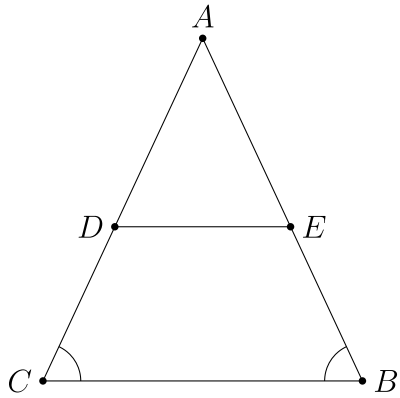
Sử dụng các tính chất của hình thang cân về cạnh, góc và đường chéo để tính toán và chứng minh.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh bên AB, AC lấy theo thứ tự các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

1. Chứng minh $BDEC$ là hình thang cân;
2. Tính góc của hình thang cân đó, biết rằng $\widehat{A} = 50^\circ$.

Lời giải.

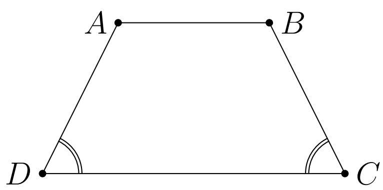


1. $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{BCA} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (1).
   Do $AD = AE$ nên $\triangle ADE$ cân tại A
   $\Rightarrow \widehat{DEA} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (2).
   Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DEA} \Rightarrow BC \parallel ED$ (3).
   Lại có $\widehat{B} = \widehat{C}$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra $BCDE$ là hình thang cân.
2. $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \dfrac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$;
   $\widehat{E} = \widehat{D} = 180^\circ - \widehat{C} = 115^\circ$.

□

Ví dụ 2. Tính các góc của hình thang cân, biết một góc bằng 40°.

Lời giải.

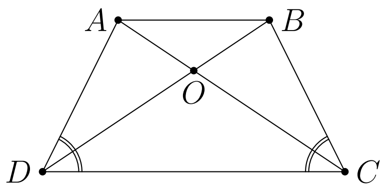


Giả sử $ABCD$ là hình thang cân có $\widehat{C} = \widehat{D} = 40^\circ$,
suy ra $\widehat{A} = \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C} = 140^\circ$.

□

Ví dụ 3. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh $OA = OB$, $OC = OD$.

Lời giải.



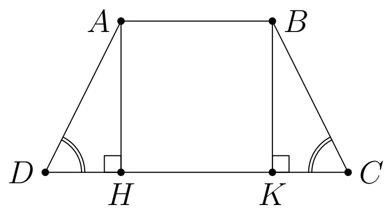
Do $ABCD$ là hình thang cân có $AB \parallel CD$
$\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD}. \end{cases}$
Xét hai tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle BCD$ có
$\begin{cases} AD = BC \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD} \\ CD \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCD$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ (cặp góc tương ứng).
Suy ra $\triangle OCD$ cân tại $O \Rightarrow OC = OD$.
Chứng minh tư tương tự với $OA = OB$.

□

Ví dụ 4. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ ($AB < CD$). Kẻ các đường cao AH, BK. Chứng minh $DH = CK$.

Lời giải.

Xét hai tam giác vuông HAD và KBC có
$AD = BC$, $\widehat{HDA} = \widehat{KCB} \Rightarrow \triangle HAD = \triangle KBC \Rightarrow DH = CK$.

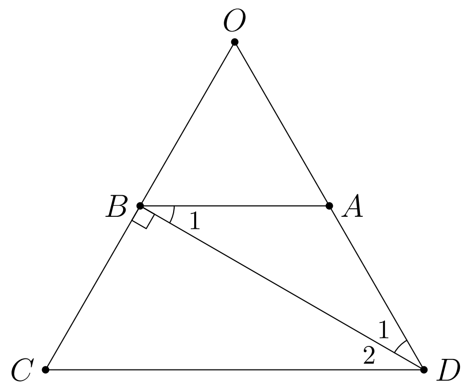


□

Ví dụ 5. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, đường chéo DB vuông góc với cạnh bên BC, DB là tia phân giác góc D. Tính chu vi của hình thang, biết $BC = 3$ cm.

Lời giải.

Trong hình thang cân $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
$\Rightarrow \widehat{B_1} + 90° + \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 180°$
$\Leftrightarrow 3\widehat{B_1} = 90° \Leftrightarrow \widehat{B_1} = 30° \Leftrightarrow \widehat{C} = 60°$.
Gọi $O = BC \cap AD \Rightarrow \triangle OCD$ đều nên $\widehat{AOB} = 60°$.
$\triangle OAB$ có $OA = OB$, $\widehat{AOB} = 60°$
$\Rightarrow \triangle OAB$ đều $\Rightarrow BA = AD = BC$.
Chu vi của hình thang $ABCD$ là $3 + 3 + 6 + 3 = 18$ cm.

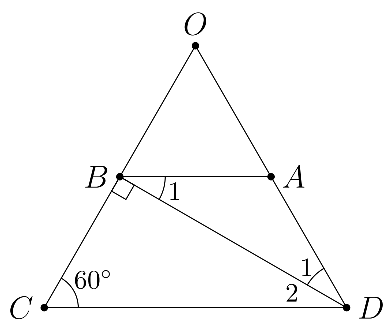


□

Ví dụ 6. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $C = 60°$. DB là tia phân giác của góc D. Tính các cạnh của hình thang biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

Lời giải.

Gọi $O = CB \cap DA \Rightarrow \triangle OCD$ đều.
$\Rightarrow AB = OA = OB$, $\widehat{BAD} = 120°$.
Có DB là tia phân giác của góc $D \Rightarrow \widehat{D_1} = 30° \Rightarrow \widehat{B_1} = 30°$
$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại $A \Rightarrow AB = AD = BC$; $CD = 2AB$.
Chu vi hình thang là $CD + DA + AB + BC = 5AB = 20 \Rightarrow AB = 4$.
Vậy $BC = AD = AB = 4$ cm, $CD = 8$ cm.



□

Dạng 7. Chứng minh hình thang cân

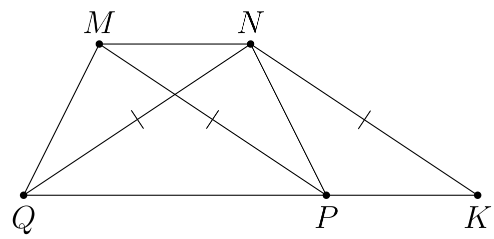
Sử dụng dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình thang $MNPQ$, ($MN \parallel PQ$), có $MP = NQ$. Qua N kẻ đường thẳng song song với MP, cắt đường thẳng PQ tại K. Chứng minh

1. $\triangle NKQ$ là tam giác cân;
2. $\triangle MPQ = \triangle NQP$;
3. $MNPQ$ là hình thang cân.

Lời giải.

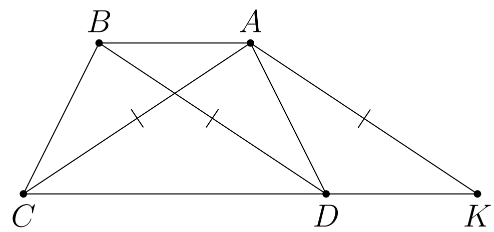


1. Từ N kẻ tia $Nx \parallel MP$, $Nx \cap QP = K$.
   Do $MN \parallel PK \Rightarrow NK = MP \Rightarrow NK = NQ$ $(= MP) \Rightarrow \triangle NKQ$ cân tại N.
2. Do $\triangle NKQ$ cân tại N nên $\widehat{NQP} = \widehat{NKQ}$. Mà $\widehat{NKQ} = \widehat{MPQ}$ (hai góc đồng vị), nên $\widehat{NQP} = \widehat{MPQ}$.
   Xét $\triangle MQP$ và $\triangle NPQ$ có
   $$\begin{cases} MP = NQ \\ \widehat{MPQ} = \widehat{NQP} \\ QP \text{ cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle MQP = \triangle NPQ \text{ (c.g.c)}.$$
3. Do $\triangle MPQ = \triangle NQP$
   $\Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{NPQ} \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

□

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có $AC = BD$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải.



Từ A kẻ tia $Ax \parallel BD$, $Ax \cap CD = K$.
Do $AB \parallel KD \Rightarrow AK = BD \Rightarrow \triangle ACK$ cân tại A
$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{AKC}$.
Lại có $\widehat{AKC} = \widehat{BDC}$ (hai góc đồng vị)
$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.
Xét hai tam giác BCD và ADC có
$$\begin{cases} BD = AC \\ \widehat{BDC} = \widehat{ACD} \\ CD \text{ cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BCD = \triangle ADC \text{ (c.g.c)}$$
$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC}$
$\Rightarrow ABCD$ là hình thang cân.

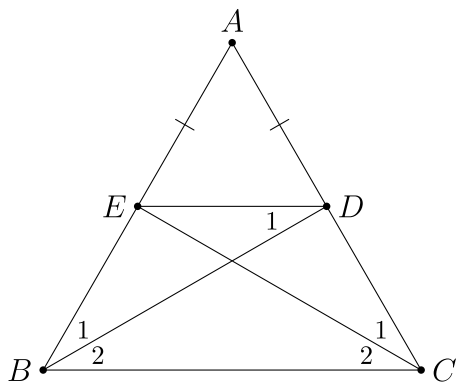
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ($D \in AC$, $E \in AB$).

1. Chứng minh $BEDC$ là hình thang cân;
2. Tính các góc của hình thang cân $BEDC$, biết $\widehat{C} = 50^\circ$.

Lời giải.



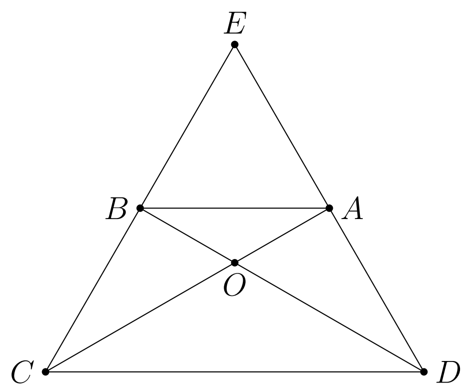
1. Do $\triangle ABC$ cân tại A và BD, CE là các đường phân giác suy ra hai tam giác BCE và CDB có $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$, BC chung, $\widehat{BCE} = \widehat{DBC}$. Vậy $\triangle BCE = \triangle CBD$ (g.c.g)
$\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{C_2}$, $BD = EC$, $BE = DC \Rightarrow \triangle ADE$ cân
$\Rightarrow BEDC$ là hình thang cân.
2. Do $BCDE$ là hình thang cân có $\widehat{C} = 50^\circ$
$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ \\ \widehat{E} = \widehat{D} = 180^\circ - \widehat{C} = 130^\circ. \end{cases}$

□

Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, O là giao điểm của hai đường chéo, E là giao điểm của hai đường thẳng chứa cạnh bên AD và BC. Chứng minh

1. $OA = OB$, $OC = OD$;
2. EO là đường trung trực của hai đáy hình thang $ABCD$.

Lời giải.



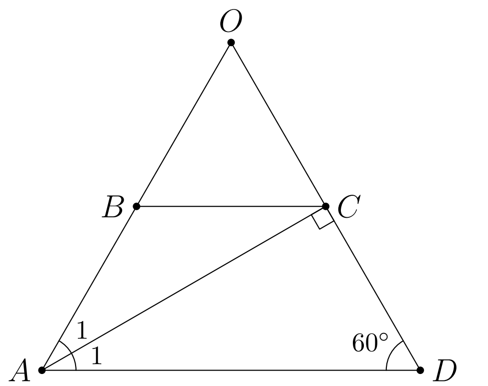
1. Do $ABCD$ là hình thang cân $AB \parallel CD$
$\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \end{cases}.$
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$ có
$\begin{cases} AD = BC \\ \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \\ AB \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$ (cặp góc tương ứng).
Suy ra $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OA = OB$.
Chứng minh tư tương tự với $OC = OD$.
2. $\triangle EBA$, $\triangle EDC$ cân tại $E \Rightarrow AE = BE$, $ED = EC \Rightarrow E$ thuộc trung trực AB, DC (1).
Mà $OA = OB$; $OC = OD$ (cmt) $\Rightarrow O$ thuộc trung trực AB, DC (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow OE$ là đường trung trực của AB, CD.

□

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD, AC là tia phân giác góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{D} = 60^\circ$.

1. Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân;
2. Tính độ dài cạnh AD, biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

Lời giải.



1. Gọi $O = BD \cap DC$. Tam giác OAD có AC vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle OAD$ cân tại A. Lại có $\widehat{D} = 60^\circ$ nên $\triangle OAD$ là tam giác đều. Suy ra $ABCD$ là hình thang cân.
2. Theo phần a) C là trung điểm OD, $BC \parallel AD \Rightarrow BC$ là đường trung bình trong $\triangle OAD \Rightarrow AD = 2BC$.
   Lại có $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AB = CD$.
   Mà $AD = DO = 2CD \Rightarrow AB = CD = BC$.

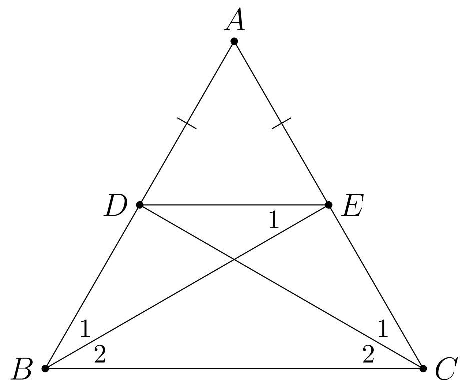
Do chu vi hình thang $ABCD$ là $AD+DC+CB+BA = 20 \Leftrightarrow 5BC = 20 \Rightarrow BC = 4 \Rightarrow AD = 8$ cm.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = AE$.

1. Tứ giác $BDEC$ là hình gì? Vì sao?
2. Các điểm D, E ở vị trí nào thì $BD = DE = EC$?

Lời giải.



1. $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (1).
   $\triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $BDEC$ là hình thang cân do $BC \parallel DE$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$.
2. Giả sử $BD = DE = EC \Rightarrow BDE$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{E_1} = \widehat{B_2}$.
   Tương tự $\triangle DEC$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Vậy BE, DC là các đường phân giác của $\triangle ABC$ thì $BD = DE = EC$. □

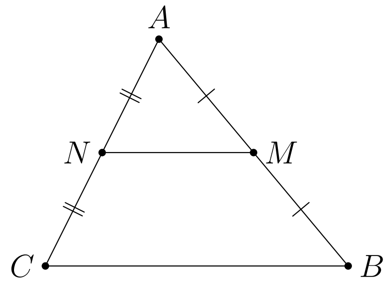
§4 Đường trung bình của tam giác, của hình thang

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Đường trung bình của tam giác

Định nghĩa 8. Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác

Định lí 4. Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

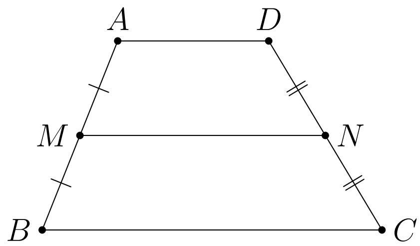


Định lí 5. Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

1.2 Đường trung bình của hình thang

Định nghĩa 9. Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

Định lí 6. Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.



Định lí 7. Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 8. Sử dụng định nghĩa và các định lí về đường trung bình trong tam giác chứng để chứng minh một tính chất hình học.

Sử dụng *Định nghĩa* về đường trung bình của tam giác và các *Định lí 1*, *Định lí 2* để suy ra điều cần chứng minh.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD, CE. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE và CD. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của MN với BD và CE. Chứng minh $MI = IK = KN$.

Lời giải.

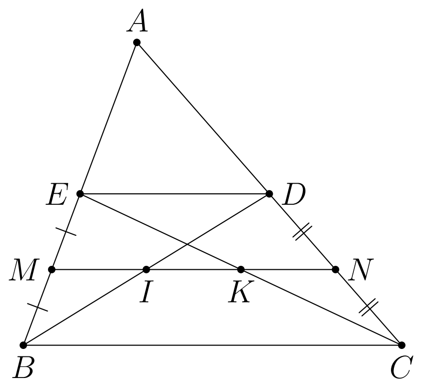
Xét $\triangle BED$ có $\begin{cases} MI \parallel ED \\ ME = BM \end{cases} \Rightarrow ID = IB.$

Xét $\triangle CED$ có $\begin{cases} NK \parallel ED \\ NC = ND \end{cases} \Rightarrow KE = KC.$

Suy ra $MI = \dfrac{1}{2}ED$; $NK = \dfrac{1}{2}ED$; $ED = \dfrac{1}{2}BC$.

$IK = MK - MI = \dfrac{1}{2}BC - \dfrac{1}{2}DE = DE - \dfrac{1}{2}DE = \dfrac{1}{2}DE.$

Vậy $MI = IK = KN$.



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BG, CG. Chứng minh tứ giác $MNDE$ có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ có $\begin{cases} ED \parallel BC \\ ED = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$ (1).

Xét $\triangle GBC$ có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$ (2).

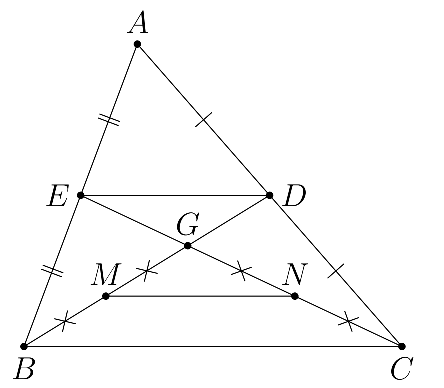
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} ED \parallel MN \\ ED = MN \end{cases}$.

Xét $\triangle BAG$ có $\begin{cases} EM \parallel AG \\ EM = \dfrac{1}{2}AG \end{cases}$ (3).

Xét $\triangle CAG$ có $\begin{cases} DN \parallel AG \\ DN = \dfrac{1}{2}AG \end{cases}$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \begin{cases} EM \parallel DN \\ EM = DN \end{cases}$.

Vậy tứ giác $MNDE$ có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.



□

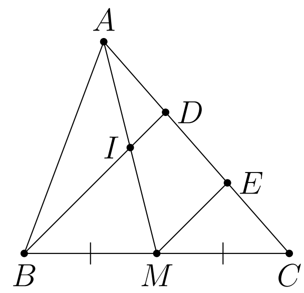
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, điểm D, E thuộc AC sao cho $AD = DE = EC$. Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của BD và AM. Chứng minh

a) $ME \parallel BD$;

b) $AI = IM$.

Lời giải.

1. Xét $\triangle CBD$ có $\begin{cases} EC = ED \\ MC = MB \end{cases} \Rightarrow ME \parallel BD$.
2. Xét $\triangle AEM$ có $\begin{cases} ID \parallel ME \\ AD = DE \end{cases} \Rightarrow IA = IM$.



□

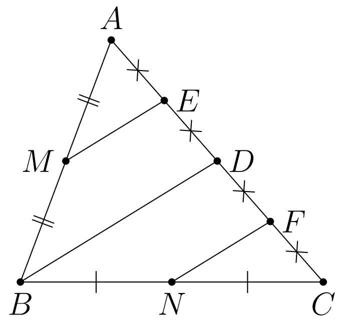
Ví dụ 4. Cho BD là đường trung tuyến của tam giác ABC, E là trung điểm của đoạn thẳng AD, F là trung điểm đoạn thẳng DC, M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm cạnh BC. Chứng minh $ME \parallel NF$ và $ME = NF$.

Lời giải.

Xét $\triangle ABD$ có $\begin{cases} MA = MB \\ EA = ED \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ME \parallel BD \\ ME = \dfrac{1}{2}BD \end{cases}$ (1).

Xét $\triangle CBD$ có $\begin{cases} NB = NC \\ FC = FD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NF \parallel BD \\ NF = \dfrac{1}{2}BD \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} ME \parallel NF \\ ME = NF. \end{cases}$



□

Dạng 9. Sử dụng định nghĩa và các định lí về đường trung bình trong hình thang để chứng minh một tính chất hình học

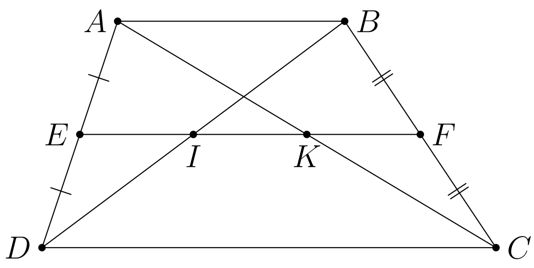
Sử dụng *Định nghĩa* về đường trung bình của tam giác và các *Định lí 3, Định lí 4* để suy ra điều cần chứng minh.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường thẳng EF cắt BD tại I, cắt AC tại K.

1. Chứng minh $AK = KC$, $BI = ID$;
2. Cho $AB = 6$ cm, $CD = 10$ cm. Tính EI, KF, IK.

Lời giải.



1. Có $\begin{cases} AE = ED \\ BF = FC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EF \parallel AB \parallel CD \\ EF = \dfrac{AB + CD}{2} \end{cases}$

   $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel EI \\ AE = ED \end{cases} \Rightarrow BI = ID.$

   Chứng minh tương tự có $AK = KC$.

2. $KF = EI = \dfrac{1}{2}AB = 3$ (cm).

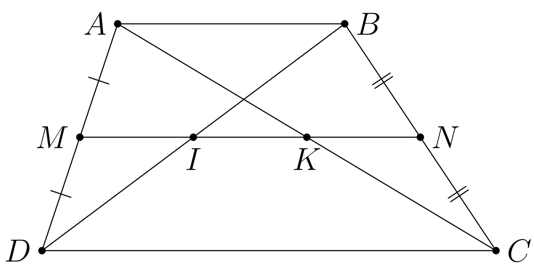
   $EF = \dfrac{1}{2}(AB + CD) = 8$ (cm)

   $\Rightarrow IK = EF - FK = 2$ (cm).

□

Ví dụ 2. Cho hình thanh $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Gọi I, K theo thứ tự là giao của MN với BD, AC. Biết $AB = 8$ cm, $CD = 16$ cm. Tính độ dài các đoạn MI, IK, KN.

Lời giải.



Có $\begin{cases} MA = MD \\ MI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MI = \dfrac{1}{2}AB = 4$ (cm).

Có $\begin{cases} NB = NC \\ NK \parallel AB \end{cases} \Rightarrow NK = \dfrac{1}{2}AB = 4$ (cm).

Có $\begin{cases} MA = MD \\ MK \parallel DC \end{cases} \Rightarrow MK = \dfrac{1}{2}DC.$

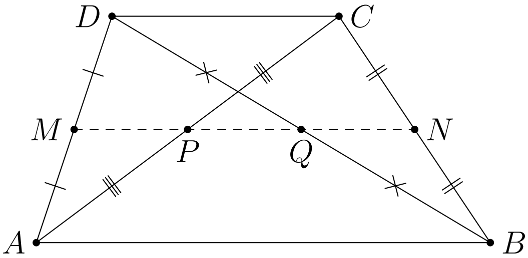
Suy ra $IK = MK - MI = \dfrac{1}{2}DC - \dfrac{1}{2}AB = 8 - 4 = 4$ (cm).

□

Ví dụ 3. Cho hình thanh $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, Q, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BC, BD, AC.

1. Chứng minh M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng;
2. Tính MP, PQ biết $AB = a$, $CD = b$ ($a > b$).

Lời giải.

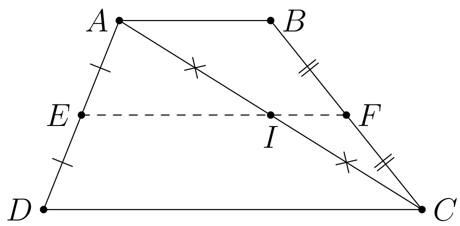


1. $\begin{cases} MN \parallel CD \\ MP \parallel CD \\ NQ \parallel CD \end{cases}$
   $\Rightarrow M, P, Q, N$ thẳng hàng (theo tiên đề Ơ-clít).
2. Có $\begin{cases} MA = MD \\ MP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MP = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{b}{2}$;
   Có $\begin{cases} MA = MD \\ MQ \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MQ = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$;
   Suy ra $PQ = MQ - MP = \dfrac{1}{2}AB - \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a-b}{2}$.

□

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD. Gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC. Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Lời giải.



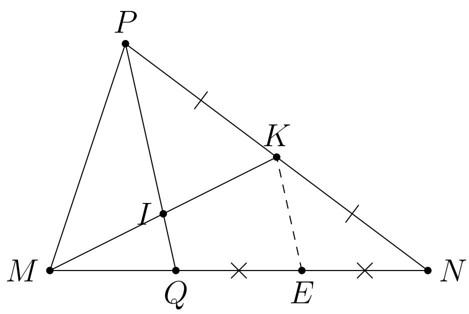
Có EI là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow EI \parallel DC$ (1).
Có EF là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow EF \parallel DC$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow E, I, F$ thẳng hàng (theo tiên đề Ơ-clít).

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác MNP, K là trung điểm NP, Q là một điểm nằm trên cạnh MN sao cho $NQ = 2QM$. Gọi I là giao điểm của PQ và MK. Chứng minh I là trung điểm của MK.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm $QN \Rightarrow KE \parallel PQ$ và Q là trung điểm ME.
$\Rightarrow IQ$ là đường trung bình của $\triangle MEK \Rightarrow I$ là trung điểm của MK.

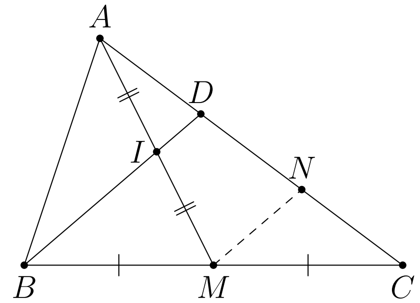
□

Bài 2. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM, D là giao điểm của BI và AC.

1. Chứng minh $AD = \dfrac{1}{2}DC$;

2. So sánh độ dài BD và ID.

Lời giải.

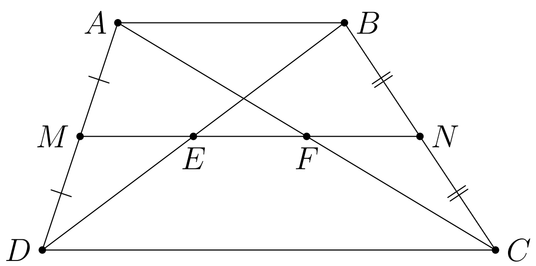


1. Kẻ $MN \parallel BD$, $N \in AC$.
   MN là đường trung bình trong $\triangle CBD$
   $\Rightarrow N$ là trung điểm của CD (1).
   IN là đường trung bình trong $\triangle AMN$
   $\Rightarrow D$ là trung điểm của AN (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $AD = \dfrac{1}{2}DC$.
2. Có $ID = \dfrac{1}{2}MN$; $MN = \dfrac{1}{2}BD$, nên $BD = ID$.

□

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, CB. Gọi E, F là giao điểm của MN với BD và AC. Chứng minh $EF = \dfrac{1}{2}(CD - AB)$.

Lời giải.



Vì MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên E, F là trung điểm của BD và AC. Suy ra $ME = FN = \dfrac{1}{2}AB$.
Có

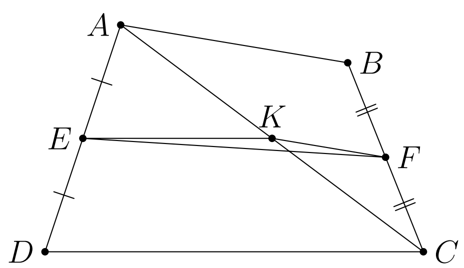
$$\begin{aligned} EF &= MN - (ME + FN) = MN - AB \\ &= \frac{CD + AB}{2} - AB = \frac{1}{2}(CD - AB). \end{aligned}$$

□

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC.

1. So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD, FK và AB;
2. Chứng minh $EF \le \dfrac{AB + CD}{2}$;
3. Khi $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải.



1. Có $\begin{cases} EA = ED \\ AK = KC \end{cases} \Rightarrow EK = \dfrac{1}{2}CD.$
   Có $\begin{cases} BF = FC \\ AK = KC \end{cases} \Rightarrow FK = \dfrac{1}{2}AB.$
2. Ta có $EF \le EK + KF$
   $\Rightarrow EF \le \dfrac{1}{2}AB + \dfrac{1}{2}CD \Leftrightarrow EF \le \dfrac{1}{2}(AB + CD)$.

□

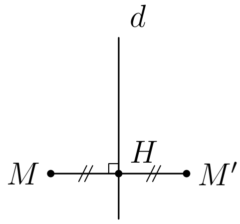
c) Khi $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$ thì $EF = EK + KF \Rightarrow E$, K, F thẳng hàng. Khi đó $ABCD$ là hình thang.

§5 Đối xứng trục

1 Tóm tắt lý thuyết

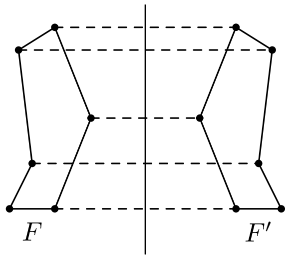
1.1 Hai điểm đối xứng nhau qua một đường thẳng

Hai điểm M và M' được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là trung trực của MM'.



1.2 Hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng:

- Hai điểm F và F' đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu: Mỗi điểm thuộc hình F đều có điểm đối xứng với nó qua d thuộc hình F' và ngược lại.
- Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hai hình F và F'.



1.3 Hình có trục đối xứng

- Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình F nếu mỗi điểm thuộc hình F đều có điểm đối xứng với nó qua d cũng thuộc hình F.
- Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

1.4 Định lý

- Nếu hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ có các điểm A và A', B và B' đối xứng với nhau qua đường thẳng d thì:
  - $AB = A'B'$.
  - AB, $A'B'$ đối xứng nhau qua d.
- Nếu các đỉnh của $\triangle ABC$ lần lượt đối xứng qua trục d với các đỉnh của tam giác $\triangle A'B'C'$ thì:
  - $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

- Hai tam giác đối xứng với nhau qua d.

☑ Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

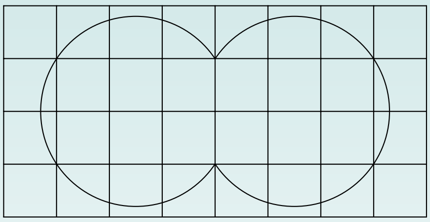
2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 10. Nhận biết và thực hành vẽ các hình có đối xứng trục

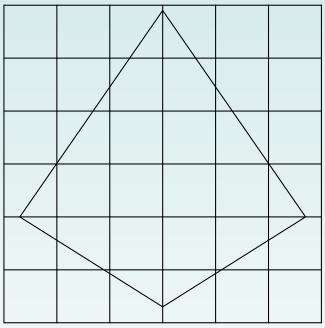
Sử dụng định nghĩa hình có trục đối xứng để xác định.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm trục đối xứng trong các hình sau. Vẽ đường thẳng d là trục đối xứng trong các hình.



Hình 1

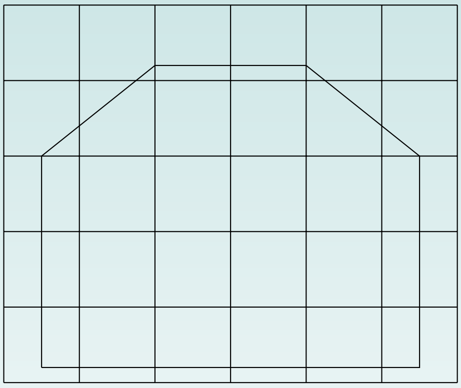


Hình 2

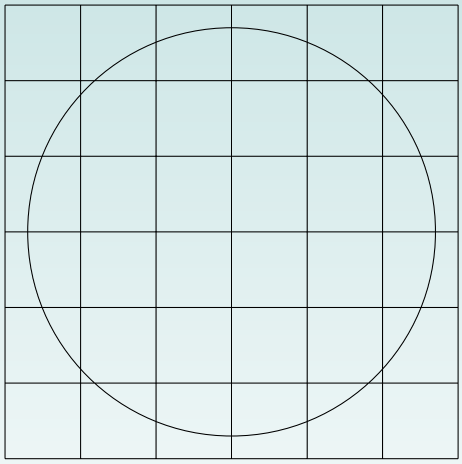
Lời giải.

Hình 1 có 2 trục đối xứng.
Hình 2 có một trục đối xứng.
Học sinh tự vẽ trục đối xứng. □

Ví dụ 2. Tìm trục đối xứng trong các hình sau. Vẽ đường thẳng d là trục đối xứng trong các hình.



Hình 1



Hình 2

Lời giải.

Hình 1 có 1 trục đối xứng.
Hình 2 có vô số trục đối xứng.
Học sinh tự vẽ trục đối xứng. □

Dạng 11. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng

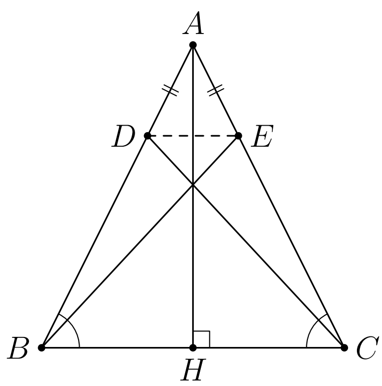
Sử dụng định nghĩa hai điểm hoặc hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A đường cao AH. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$.
Chứng minh:

1. D đối xứng với E qua AH;
2. Tam giác ADC đối xứng với tam giác AEB qua AH.

Lời giải.



1. Xét $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}. \end{cases}$
Xét tam giác ADE có $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A.
$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.
Vì hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow DE \perp AH$.
Gọi I là giao điểm của AH và DE.
Xét tam giác ADE cân tại A có AI là đường cao.
$\Rightarrow AI$ đồng thời là đường trung trực tam giác ADE.
$\Rightarrow D$ đối xứng với E qua AH.

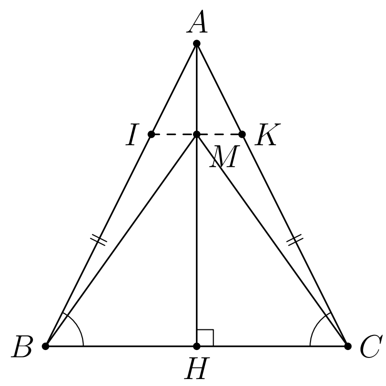
b) Vì AH là đường trung trực của BC nên B và C đối xứng với nhau qua AH.
D và E đối xứng nhau qua AH và A đối xứng với chính nó qua AH.
Vậy tam giác ADC đối xứng với tam giác AEB qua AH.

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A đường cao AH. Trên cạnh AB lấy điểm I, trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $BI = CK$. Đoạn thẳng AH cắt IK tại M. Chứng minh:

1. I đối xứng với K qua AH;
2. Tam giác ABM đối xứng với tam giác ACM qua AH.

Lời giải.



1. Vì tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2}. \end{cases}$
Mà $BI = CK$ nên $AI = AK$.
Xét tam giác AIK có $AI = AK \Rightarrow \triangle AIK$ cân tại A.
$\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{AKI} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{ABC}$.
Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IK \parallel BC \Rightarrow IK \perp AH$.
Xét tam giác AIK cân tại A có AM là đường cao
$\Rightarrow AM$ đồng thời là đường trung trực tam giác AIK.
$\Rightarrow I$ đối xứng với K qua AH.

b) Ta có B và C đối xứng với nhau qua AH. A và M đối xứng với chính nó qua AH.
$\Rightarrow \triangle ABM$ đối xứng với $\triangle ACM$ qua AH.

□

Dạng 12. Sử dụng tính chất đối xứng trục để giải toán

Vận dụng các tính chất đối xứng trục: Hai đoạn thẳng, góc, tam giác đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau.

BÀI TẬP MẪU

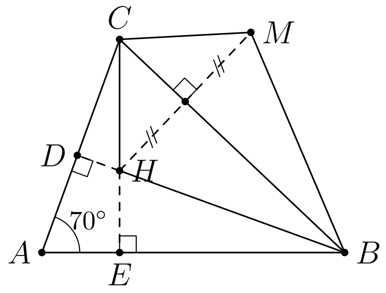
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 70^\circ$, trực tâm H. Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC.

1. Chứng minh $\triangle BHC = \triangle BMC$;
2. Tính góc $\widehat{BMC}$.

Lời giải.

1. Vì M là điểm đối xứng với H qua BC.
   B và C là điểm đối xứng của chính nó qua BC.
   $\Rightarrow \triangle BHC = \triangle BMC$.

2. Gọi D và E lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C xuống AC và AB.
   Xét tứ giác $AEHD$ có $\widehat{A} + \widehat{E} + \widehat{H} + \widehat{D} = 360^\circ$
   $\Rightarrow \widehat{DHE} = 110^\circ$
   $\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{BHC} = 110^\circ$ (đối đỉnh)
   $\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BMC} = 110^\circ$ (hai góc tương ứng).



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^\circ$, điểm M thuộc BC. Điểm D đối xứng với M qua AB, điểm E đối xứng với M qua AC.

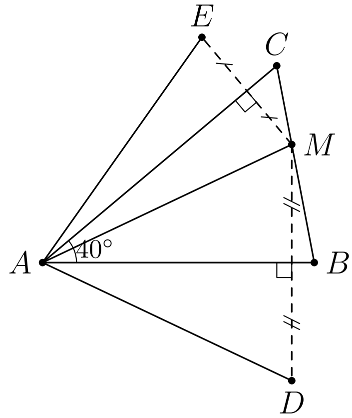
1. Chứng minh $AD = AE$;

2. Tính góc $\widehat{DAE}$.

Lời giải.

1. Vì D là điểm đối xứng với M qua AB.
   $\Rightarrow AB$ là đường trung trực của MD.
   $\Rightarrow AM = MD$.
   Tương tự $AM = AE$.
   $\Rightarrow AD = AE$.

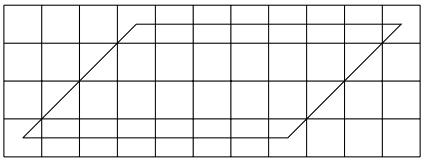
2. Ta có $\widehat{DAB}$ đối xứng với $\widehat{MAB}$ qua AB, $\widehat{MAC}$ đối xứng với $\widehat{EAC}$ qua $AB \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{MAB}$; $\widehat{MAC} = \widehat{EAC}$.
   Khi đó, ta có
   $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAM} + \widehat{MAC} + \widehat{CAE} = 2\left(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}\right) = 80^\circ$.



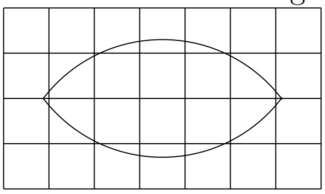
□

3 Bài tập về nhà

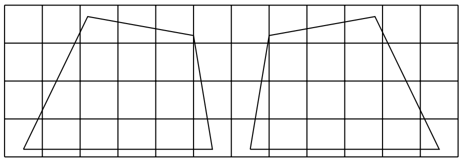
Bài 1. Tìm trục đối xứng trong các hình vẽ sau. Vẽ đường thẳng d là trục đối xứng trong các hình.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

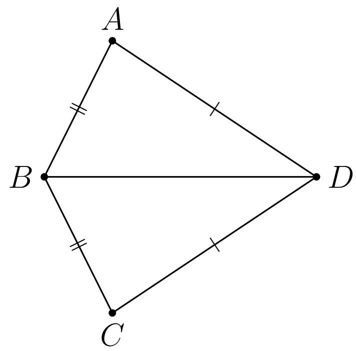
Lời giải.

Hình 1 không có trục đối xứng.
Hình 2 có 2 trục đối xứng.
Hình 3 có một trục đối xứng.
Học sinh tự vẽ trục đối xứng. □

Bài 2. Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$, $CD = DA$. Chứng minh điểm A đối xứng với điểm C qua đường thẳng BD.

Lời giải.

Vì $AB = BC$ nên B thuộc đường trung trực của AC.
Vì $CD = DA$ nên D thuộc đường trung trực của AC.
$\Rightarrow BD$ là đường trung trực của AC.
$\Rightarrow A$ và C đối xứng với nhau qua BD.

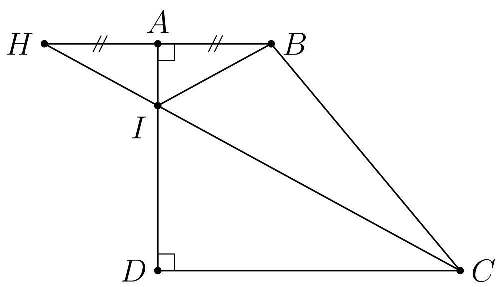


□

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi H là điểm đối xứng với B qua AD. Điểm I là giao điểm của CH và AD. Chứng minh $\widehat{AIB} = \widehat{DIC}$.

Lời giải.

Vì H là điểm đối xứng với B qua AD nên AD là đường trung trực của HB.
Vì I thuộc AD nên $IH = IB \Rightarrow \triangle IHB$ cân tại I.
Xét tam giác IHB cân tại I có IA là đường trung tuyến.
$\Rightarrow IA$ đồng thời là đường phân giác
$\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{AIB}$ mà $\widehat{AIH} = \widehat{DIC} \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{DIC}$.



□

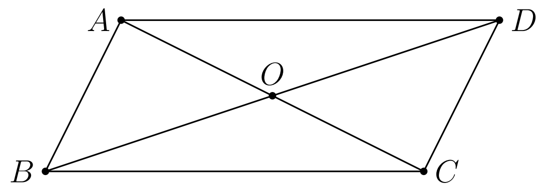
§6 Hình bình hành

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 10. Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$



1.2 Tính chất

Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

1.3 Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có các cặp cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 13. Sử dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

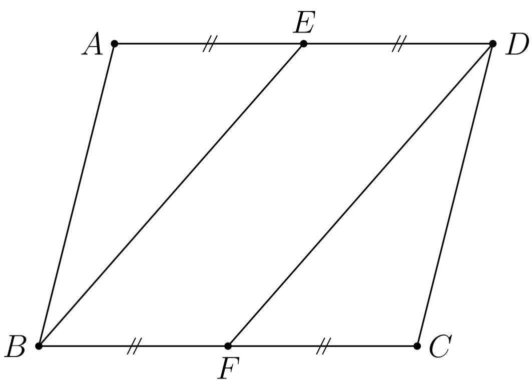
Sử dụng định nghĩa hình bình hành và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình bình hành để chứng minh các tính chất hình học.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Chứng minh:

1. $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$;
2. $BE \parallel FD$.

Lời giải.



1. Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADC} \end{cases} \Rightarrow ED \parallel BF \quad (1).$
Vì E là trung điểm của $AD \Rightarrow AE = ED = \dfrac{AD}{2}$.
Vì F là trung điểm của $BC \Rightarrow BF = FC = \dfrac{BC}{2}$.
Do đó $ED = BF \quad (2)$.
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = DF$.
Vì $BEDF$ là hình bình hành nên $\widehat{EBF} = \widehat{EDF}$.
Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CDF}$.

b) Vì tứ giác $BEDF$ là hình bình hành suy ra $BE \parallel DF$.

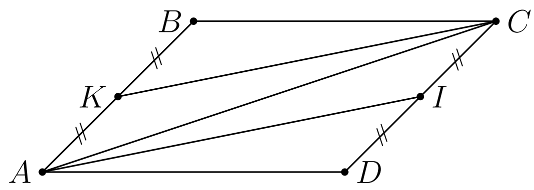
□

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh:

a) $AI = CK$ và $\widehat{IAC} = \widehat{KCA}$;

b) $AI \parallel CK$.

Lời giải.



1. Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
   $\Rightarrow AB \parallel CD; AB = CD \Rightarrow AK \parallel CI \quad (1)$.
   Vì K là trung điểm của $AB \Rightarrow AK = KB = \dfrac{AB}{2}$.
   Vì I là trung điểm của $CD \Rightarrow CI = ID = \dfrac{CD}{2}$.
   $\Rightarrow AK = CI \qquad (2)$.
   Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow AI = CK$.
   Vì tứ giác $AKCI$ là hình bình hành suy ra $KC \parallel AI$
   $\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{KCA}$ (so le trong).

2. Vì tứ giác $AKCI$ là hình bình hành suy ra $AK \parallel CI$.

□

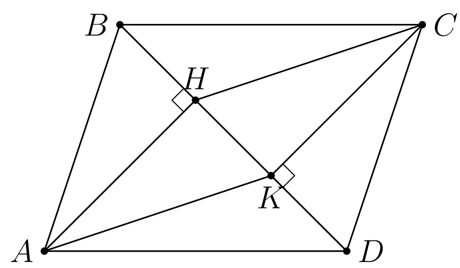
Dạng 14. Chứng minh tứ giác là hình bình hành

Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD. Kẻ AH và CK vuông góc với BD tại H và K. Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Lời giải.



Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ BC \parallel AD; BC = AD. \end{cases}$

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CDK}$ (so le trong).

Vì $\begin{cases} AH \perp BD \\ CK \perp DB \end{cases} \Rightarrow AH \parallel CK \quad (1)$.

Vì $\triangle HAB = \triangle KCD$ (cạnh huyền - góc nhọn).

$\Rightarrow AH = CK$ (hai cạnh tương ứng) $\quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D. Chứng minh tứ giác $BDCH$ là hình bình hành.

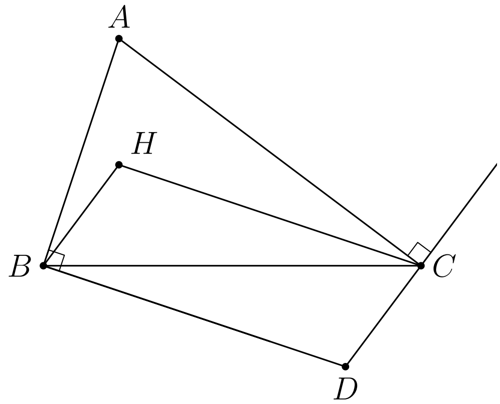
Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ có H là trực tâm, suy ra $CH \perp AB$; $BH \perp AC$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel BD \quad (1).$

Vì $\begin{cases} BH \perp AC \\ CD \perp AC \Rightarrow BH \parallel CD \end{cases} \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.



□

Dạng 15. Ba điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy

Vận dụng tính chất về đường chéo của hình bình hành. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của OB, OD. Kẻ PM vuông góc với AB tại M, QN vuông góc với CD tại N. Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng và các đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

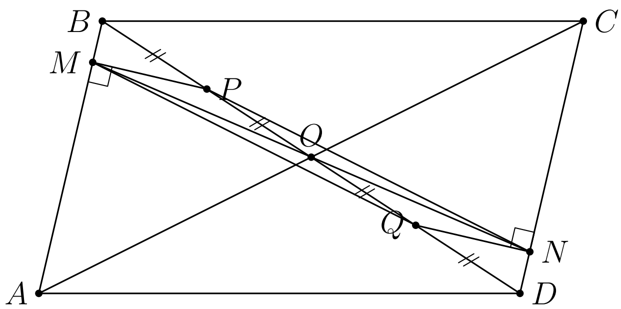
Vì $\begin{cases} QN \perp CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow QN \perp AB.$

Ta có $\begin{cases} QN \perp AB \\ MP \perp AB \end{cases} \Rightarrow MP \parallel NQ \quad (1).$

Ta có $\triangle MPB = \triangle NQD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow MP = NQ \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.



Xét hình bình hành $MPNQ$ có O là trung điểm của PQ. Suy ra O là giao điểm hai đường chéo của của hình bình hành $MPNQ$.

$\Rightarrow M, O, N$ thẳng hàng. Do đó AC, MN, PQ cùng đi qua O. Hay AC, MN, PQ đồng quy. □

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên AB lấy điểm K, trên CD lấy điểm I sao cho $AK = CI$. Chứng minh rằng ba điểm K, O, I thẳng hàng và các đường thẳng AC, BD, KI đồng quy.

Lời giải.

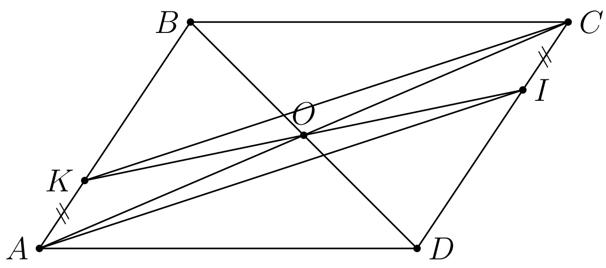
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD \Rightarrow AK \parallel CI$.

Xét tứ giác $AKCI$ có $\begin{cases} AK = CI \\ AK \parallel CI. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKCI$ là hình bình hành.

Xét hình bình hành $AKCI$ có O là trung điểm AC.

Suy ra O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $AKCI \Rightarrow K$, O, I thẳng hàng. Hay AC, BD, KI đồng quy.



□

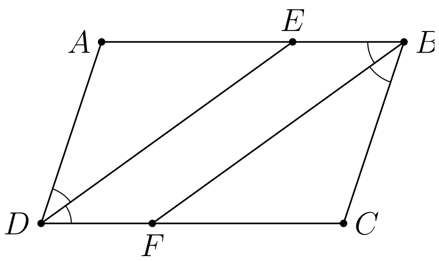
3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ $(AB > BC)$. Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

a) Chứng minh $DE \parallel BF$;

b) Tứ giác $DEBF$ là hình gì?

Lời giải.



1. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases} AB \parallel CD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADC}. \end{cases}$

   Vì DE là phân giác góc D nên $\widehat{ADE} = \widehat{EDC} = \dfrac{\widehat{ADC}}{2}$.

   Vì BF là phân giác góc B nên $\widehat{ABF} = \widehat{FBC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$.

   Mà $\widehat{EBF} = \widehat{BFC}$ (so le trong).

   Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{BFC} \Rightarrow DE \parallel BF$ (đồng vị).

1. Vì $AB \parallel CD$ nên $EB \parallel DF$. Xét tứ giác $DEBF$ có $\begin{cases} EB \parallel DF \\ DE \parallel BF. \end{cases}$

   Vậy tứ giác $DEBF$ là hình bình hành.

□

Bài 2. Cho tam giác ABC. Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Giả sử $AE = BF$. Chứng minh:

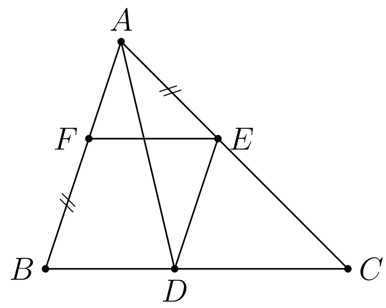
a) Tam giác AED cân;

b) AD là phân giác của góc A.

Lời giải.

1. Vì $EF \parallel BC \Rightarrow EF \parallel DB$. Vì $ED \parallel AB \Rightarrow ED \parallel BF$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $BFED$ là hình bình hành$\Rightarrow ED = FB$.
Mà $AE = BF$ (gt)$\Rightarrow AE = ED \Rightarrow$ Tam giác EAD cân.

2. Vì tam giác EAD cân tại E nên $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$.
Vì $ED \parallel AB \Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{DAB}$ (so le trong).
$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$.
$\Rightarrow AD$ là tia phân giác của góc A.



□

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Xét tam giác DAC có PQ là đường trung bình

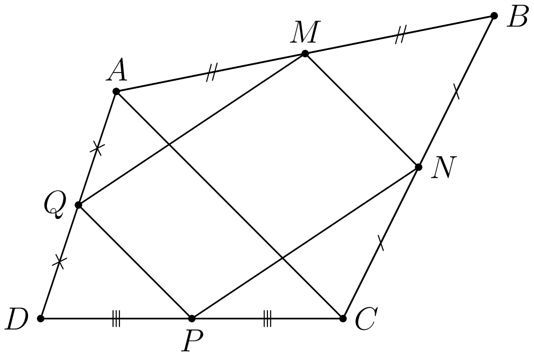
$$\Rightarrow \begin{cases} PQ \parallel AC \\ PQ = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases} \quad (1)$$

Xét tam giác BAC có MN là đường trung bình

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC \\ MN = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



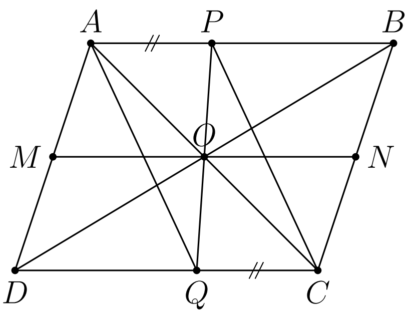
□

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường thẳng AC và BD. Qua điểm O vẽ đường thẳng song song với AB cắt hai cạnh AD, BC lần lượt tại M, N. Trên AB, CD lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Gọi I là giao điểm của AC và PQ. Chứng minh:

1. Các tứ giác $AMNB, APCQ$ là hình bình hành;
2. Ba điểm M, N, I thẳng hàng;
3. Ba đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

Lời giải.

1. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$; $AB \parallel CD$.
Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AM \parallel BN$.
Xét tứ giác $AMNB$ có $\begin{cases} AM \parallel BN \\ AB \parallel MN. \end{cases}$
$\Rightarrow$ Tứ giác $AMNB$ là hình bình hành.
Xét tứ giác $APCQ$ có $\begin{cases} AP \parallel CQ \\ AP = CQ \end{cases}$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $APCQ$ là hình bình hành.



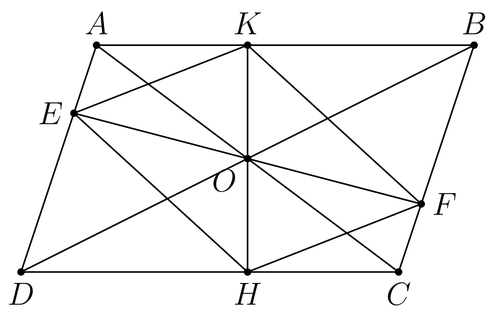
b) Vì $APCQ$ là hình bình hành. Mà I là giao điểm của AC và PQ suy ra O và I trùng nhau. Do đó M, N, I thẳng hàng.

c) Ta có I là giao điểm của AC và PQ. Mà M, N, I thẳng hàng.
Vậy ba đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

□

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường thẳng AC và BD. Qua điểm O, vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F. Qua O vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H. Chứng minh tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

Lời giải.



Vì O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ nên $OA = OC$.
Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OFC$ có

- $\widehat{EAO} = \widehat{FCO}$ (so le trong).
- $OA = OC$ (chứng minh trên).
- $\widehat{AOE} = \widehat{COF}$ (đối đỉnh).

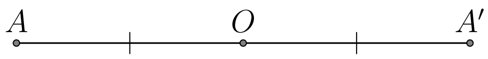
$\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OFC$ (g - c -g).
$\Rightarrow OE = OF$ (hai cạnh tương ứng).
$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF.
Tương tự O là trung điểm của HK.
Xét tứ giác $EKFH$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
Do đó tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

□

§7 Đối xứng tâm

1 Tóm tắt lý thuyết

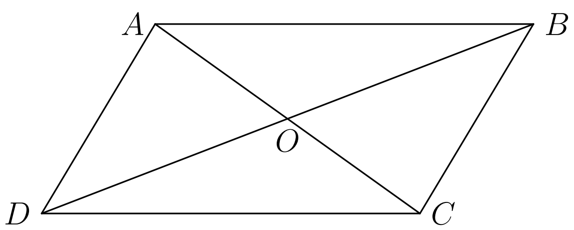
Định nghĩa 11. *Hai điểm đối xứng qua một điểm: Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm ấy.*



A đối xứng với A' qua $O \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AA'.

- ☑ Quy ước: Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O chính là điểm O.
- ☑ Hai hình đối xứng qua một điểm: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu một điểm bất kì thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.
- ☑ Hình có tâm đối xứng: Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua điểm O cũng thuộc hình H.

  Định lí 8. Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.



O là tâm đối xứng của hình bình hành $ABCD$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 16. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một điểm

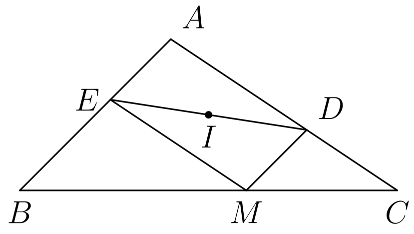
Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một điểm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm E, D, M sao cho $MD \parallel AB$ và $ME \parallel AC$. Gọi I là trung điểm của ED.

1. Tứ giác $AEMD$ là hình gì?
2. Chứng minh rằng điểm A đối xứng với điểm M qua điểm I.

Lời giải.



a) Ta có $MD \parallel AB$ và $ME \parallel AC$.
$\Rightarrow MD \parallel AE$ và $ME \parallel AD$.
$\Rightarrow AEMD$ là hình bình hành.

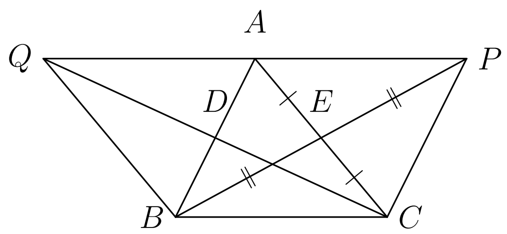
b) Ta có tứ giác $AEMD$ là hình bình hành và I là trung điểm của ED.
$\Rightarrow I$ là trung điểm của AM.
$\Rightarrow$ Điểm A đối xứng với điểm M qua điểm I.

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi các điểm D, E theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Lấy P đối xứng với B qua điểm E và Q đối xứng với C qua điểm D.

1. Các tứ giác $BAPC$, $CAQB$ là hình gì?
2. Chứng minh rằng hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua điểm A.

Lời giải.



a) Ta có: E là trung điểm AC và E là trung điểm BP.
$\Rightarrow$ Tứ giác $BAPC$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
$\Rightarrow BAPC$ là hình bình hành.
Chứng minh tương tự: $CAQB$ là hình bình hành.

b) $BAPC$ là hình bình hành $\Rightarrow AP \parallel BC$ và $AP = BC$. (1)
$CAQB$ là hình bình hành $\Rightarrow QA \parallel BC$ và $QA = BC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra Q, A, P thẳng hàng và $AQ = AP$ nên hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua điểm A.

□

Dạng 17. Sử dụng tính chất đối xứng để giải toán

Hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau.

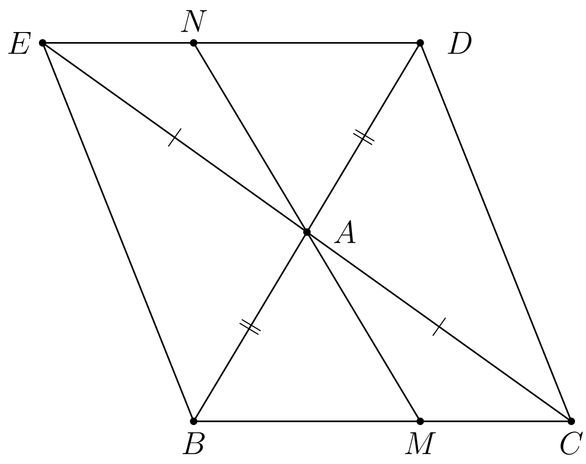
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D đối xứng với B qua A, vẽ điểm E đối xứng với C qua A. Gọi M là điểm nằm giữa B và C. Tia MA cắt DE tại N. Chứng minh:

a) Tứ giác $BEDC$ là hình bình hành;

b) $NE = MC$.

Lời giải.



a) Tứ giác $BEDC$ có 2 đường chéo EC và BD cắt nhau tại trung điểm A ($AD = AB$ và $AE = AC$);
$\Rightarrow BEDC$ là hình bình hành.

b) Ta có:
$$\begin{cases} EA = CA. \\ \widehat{EAN} = \widehat{CAM} (\text{đối đỉnh}). \\ \widehat{NEA} = \widehat{MCA} \text{ (so le trong do } BC \parallel ED). \end{cases}$$
$\Rightarrow \triangle EAN = \triangle CAM$ (g-c-g).
$\Rightarrow NE = MC$.

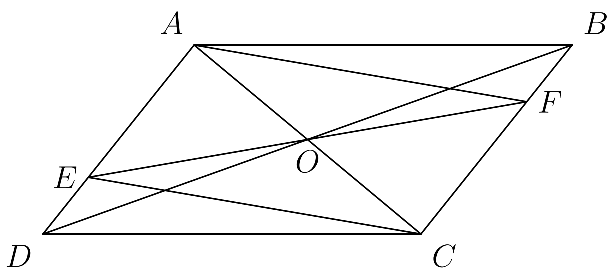
□

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AD, BC ở E và F. Chứng minh:

a) $OE = OF$;

b) $AECF$ là hình bình hành.

Lời giải.



a) Ta có:
$$\begin{cases} DO = OB (\text{do ABCD là hình bình hành}). \\ \widehat{EOD} = \widehat{FOB} (\text{đối đỉnh}) \\ \widehat{EDO} = \widehat{FBO} \text{ (so le trong do } AD \parallel BC) \end{cases}$$
$\Rightarrow \triangle DOE = \triangle BOF$ (g-c-g).
$\Rightarrow OE = OF$.

b) Tứ giác $AECF$ có 2 đường chéo AC và EF cắt nhau tại trung điểm O ($AO = OC$ và $OF = OE$).
$\Rightarrow AECF$ là hình bình hành.

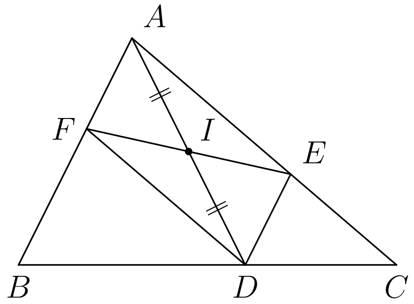
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC. Từ D kẻ đường thẳng song song với cạnh AB, cắt cạnh AC tại E và đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại F. Chứng minh hai điểm E và F đối xứng với nhau qua trung điểm I của đoạn thẳng AD.

Lời giải.

- ☑ Ta có $DE \parallel AB$ và $DF \parallel AC$.
  $\Rightarrow DE \parallel AF$ và $DF \parallel AE$.
  $\Rightarrow AEDF$ là hình bình hành.
- ☑ I là trung điểm của $AD \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của EF (2 đường chéo).
  $\Rightarrow E$ và F đối xứng với nhau qua I.



□

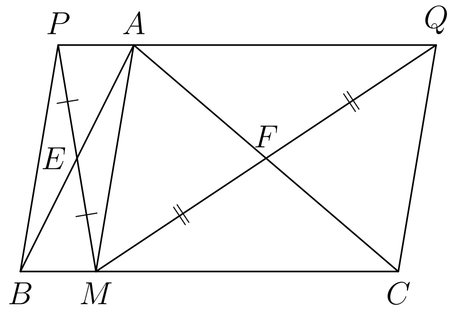
Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và AC. Một điểm M bất kì thuộc cạnh BC, gọi điểm đối xứng với M qua E là P và điểm đối xứng của M qua điểm F là Q. Chứng minh:

a) A thuộc đường thẳng PQ;

b) $BCQP$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có $FA = FC$ và $FQ = FM$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $AQCM$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. $\Rightarrow AQCM$ là hình bình hành.
$\Rightarrow AQ \parallel MC \Rightarrow AQ \parallel BC$. (1)
Ta có $EA = EB$ và $EP = EM$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $APBM$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. $\Rightarrow APBM$ là hình bình hành.
$\Rightarrow AP \parallel BM \Rightarrow AP \parallel BC$.(2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow A$, Q, P thẳng hàng $\Rightarrow A \in PQ$.



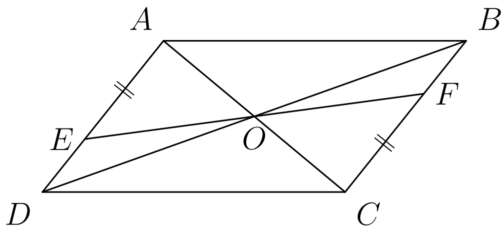
b) Vì $PA \parallel BM (PA = BM)$ và $AQ \parallel MC (AQ = MC)$
Nên $BCQP$ là hình bình hành.

□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm E và trên cạnh CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Chứng minh rằng hai điểm E, F đối xứng với nhau qua giao điểm O của các đường chéo AC, BD.

Lời giải.

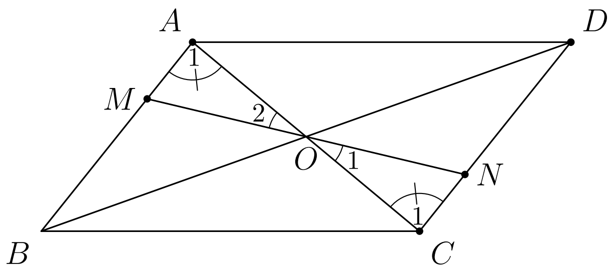
Ta có $AE = CF$ và $AE \parallel CF \Rightarrow AECF$ là hình bình hành.
$\Rightarrow EF$ cắt AC tại trung điểm O của AC nên E, O, F thẳng hàng và O cũng là trung điểm của EF.
Vậy hai điểm E, F đối xứng với nhau qua giao điểm O của các đường chéo AC, BD.



□

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh điểm M đối xứng với điểm N qua O.

Lời giải.



Xét $\triangle AOM$ và $\triangle CON$ có:

$$\begin{cases} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} (\text{ đối đỉnh}) \\ \widehat{A_1} = \widehat{C_1} (\text{ so le trong}) \\ OA = OC \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle AOM = \triangle CON$

$\Rightarrow OM = ON$.

Vậy M, N đối xứng qua O.

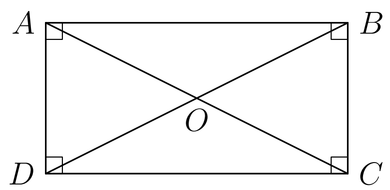
□

§8 Hình chữ nhật

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 12.
Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.
Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.
$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$



⚠ **17.** Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành, cũng là một hình thang cân.

1.2 Tính chất

Tính chất 4. Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Tính chất 5. Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thang cân.

Tính chất 6. *Tính chất đặc trưng:* Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

1.3 Dấu hiệu nhận biết

- ☑ Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- ☑ Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- ☑ Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- ☑ Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

1.4 Áp dụng vào tam giác vuông

- ☑ Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
- ☑ Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 18. Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật

Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật.

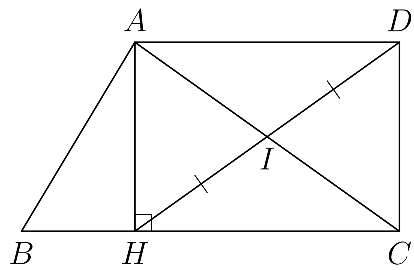
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC. Lấy D là điểm đối xứng với H qua I. Chứng minh tứ giác $AHCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

- Ta có $IA = IC$ và $IH = ID$.
  $\Rightarrow AHCD$ là hình bình hành do có hai đường chéo AC và DH cắt nhau tại trung điểm I.
- Mà $\widehat{AHC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow AHCD$ là hình chữ nhật.



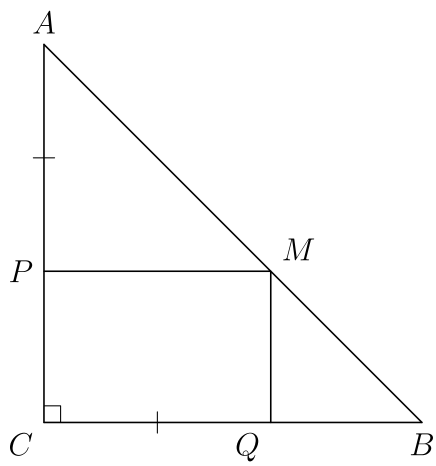
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$). Chứng minh tứ giác $PCQM$ Là hình chữ nhật.

Lời giải.

Ta có: Tam giác ABC vuông cân tại C nên $\widehat{CAB} = 45^\circ$.
$PM \parallel BC$, $AC \perp BC \Rightarrow PM \perp AC$ hay $PM \perp AP$.
Do đó tam giác APM vuông tại P và $\widehat{PAM} = 45^\circ$ nên APM là tam giác vuông cân tại $P \Rightarrow AP = PM$.
Mà $AP = CQ \Rightarrow PM = CQ$. Và $PM \parallel BC \Leftrightarrow PM \parallel CQ$.
Do đó $PMQC$ là hình bình hành. Hình bình hành $PMQC$ có $\widehat{MPC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow PMQC$ là hình chữ nhật.



□

Dạng 19. Sử dụng định lí thuận và đảo của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông

Sử dụng định lí về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh các hình bằng nhau hoặc chứng minh vuông góc ...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh:

a) $\widehat{IHK} = 90°$;

b) Chu vi $\triangle IHK$ bằng nửa chu vi $\triangle ABC$.

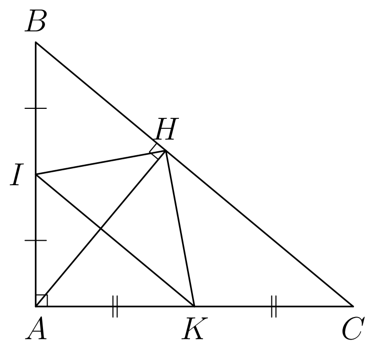
Lời giải.

a)
- Ta có $IH = IA$ (trung tuyến tam giác vuông).
  $\Rightarrow \triangle IAH$ cân tại I.
  $\Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{IHA}$.
- Chứng minh tương tự: $\widehat{HAK} = \widehat{AHK}$.

$\Rightarrow \widehat{IHK} = \widehat{IHA} + \widehat{AHK} = 90°$.

b)
- IK là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}BC$. (1)
- IH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác BHA vuông tại H. $\Rightarrow HI = \dfrac{1}{2}AB$. (2)
- HK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác AHC vuông tại H. $\Rightarrow HK = \dfrac{1}{2}AC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow C_{\triangle IHK} = \dfrac{1}{2}C_{\triangle ABC}$.



□

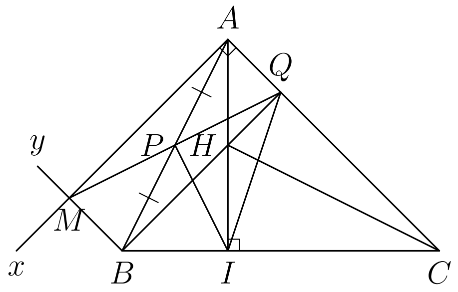
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có đường cao AI. Từ A kẻ tia Ax vuông góc với AC, từ B kẻ tia By song song với AC. Gọi M là giao điểm của tia Ax và tia By. Nối M với trung điểm P của AB, đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H.

a) Tứ giác $AMBQ$ là hình gì?

b) Chứng minh tam giác PIQ cân.

Lời giải.

a)
- Ta có: $Ax \perp AC$ và $By \parallel AC$
  $\Rightarrow Ax \perp By \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$.
- Xét $\triangle MAQ$ và $\triangle QBM$ có:
  $$\begin{cases} \widehat{MQA} = \widehat{BMQ} \\ MQ \text{ là cạnh chung} \\ \widehat{AMQ} = \widehat{BQM} (Ax \parallel QB) \end{cases}$$
  $\Rightarrow \triangle MAQ = \triangle QBM$ (g-c-g)
  $\Rightarrow \widehat{MBQ} = \widehat{MAQ} = 90^\circ$ (2 góc tương ứng)
- Xét tứ giác $AMBQ$ có:
  $\widehat{QAM} = \widehat{AMB} = \widehat{MBQ} = 90^\circ$
  $\Rightarrow$ tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật.



b)
- Do tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật. Mà P là trung điểm AB $\Rightarrow PQ = \dfrac{1}{2}AB$ (1)
- Xét $\triangle AIB$ vuông tại I và có IP là đường trung tuyến.
  $\Rightarrow IP = \dfrac{1}{2}AB$ (2)
  Từ (1) và (2) $\Rightarrow QP = IP \Rightarrow \triangle PQI$ cân tại P.

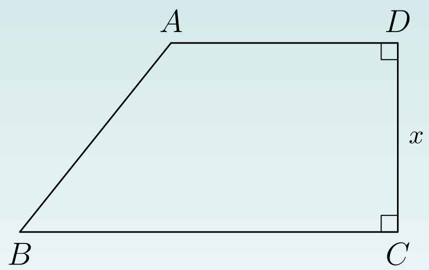
□

Dạng 20. Sử dụng tính chất hình chữ nhật để tính độ dài đoạn thẳng

Sử dụng tính chất vuông góc và định lý Pytago trong tam giác vuông để tính toán.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x trong hình vẽ bên:

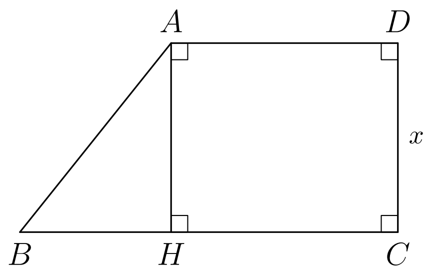


Biết $AB = 13$ cm, $BC = 15$ cm, $AD = 10$ cm.

Lời giải.

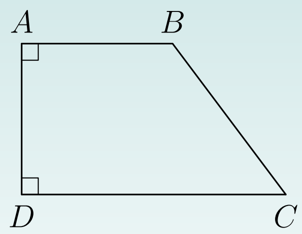
- Kẻ $AH \perp BC$, ta có $ADCH$ là hình chữ nhật nên $AD = CH = 10$ cm, $DC = AH = x$.
- Xét $\triangle AHB$ vuông tại H có $BH = BC - HC = 5$ cm.

$\Rightarrow x = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 12$ cm.



□

Ví dụ 2. Tìm độ dài CD trong hình vẽ bên:

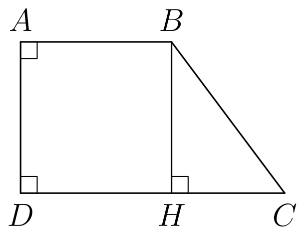


Biết $AB = 7$ cm, $AD = 8$ cm, $BC = 10$ cm.

Lời giải.

- Kẻ $BH \perp DC$ ta có $ABHD$ là hình chữ nhật nên $DH = AB = 7$ cm, $BH = AD = 8$ cm.
- Tam giác BHC vuông tại H có $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 6$ cm.

$\Rightarrow DC = DH + HC = 13$ cm.



□

Dạng 21. Tìm điều kiện để tứ giác là hình chữ nhật

Vận dụng định nghĩa và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật.

BÀI TẬP MẪU

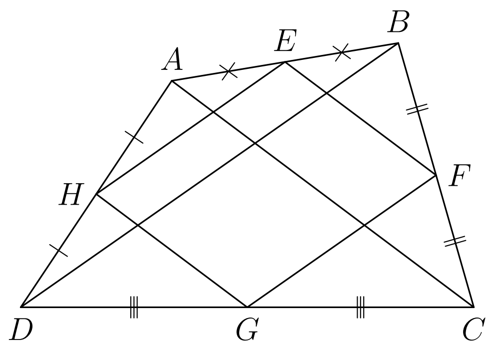
Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh $EFGH$ là hình bình hành;
2. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

a)
- Xét $\triangle ABC$ có EF là đường trung bình.
  $\Rightarrow EF \parallel AC$ và $EF = \dfrac{1}{2}AC$. (1)
- Xét $\triangle ADC$ có HG là đường trung bình.
  $\Rightarrow HG \parallel AC$ và $HG = \dfrac{1}{2}AC$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EFGH$ là hình bình hành.



b) Để $EFGH$ là hình chữ nhật thì $\widehat{HEF} = 90^\circ \Leftrightarrow HE \perp EF$
Vì $EF \parallel AC$ và $HE \parallel BD$ nên $EF \perp HE \Leftrightarrow AC \perp BD$. $\Rightarrow$ Để $EFGH$ là hình chữ nhật thì $AC \perp BD$.

□

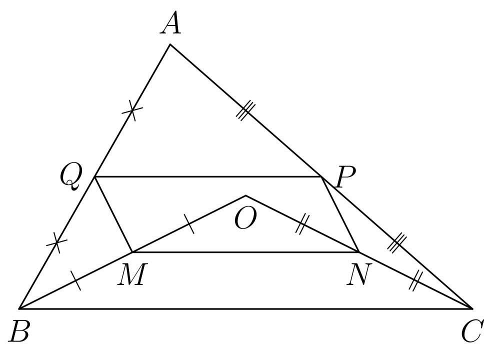
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

1. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành;
2. Xác định vị trí của điểm O để tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

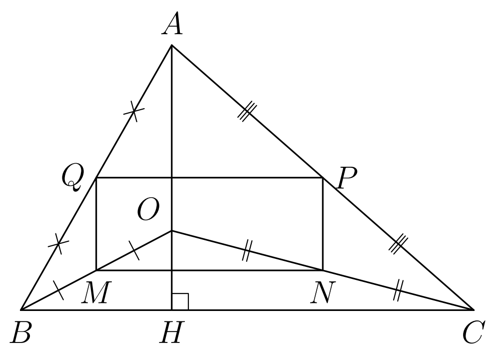
a)
- Xét $\triangle OBC$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN \parallel BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC$. (1)
- Xét $\triangle ABC$ có PQ là đường trung bình $\Rightarrow PQ \parallel BC$ và $PQ = \dfrac{1}{2}BC$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.



b)
- Xét $\triangle CAO$ có PN là đường trung bình $\Rightarrow PN \parallel AO$. (3)
- Để $MNPQ$ là hình chữ nhật thì $PN \perp MN$. (4)

Từ (3) và (4) Để $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AO \perp MN \Rightarrow AO \perp BC$ ($MN \parallel BC$).
Nên O nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh A.

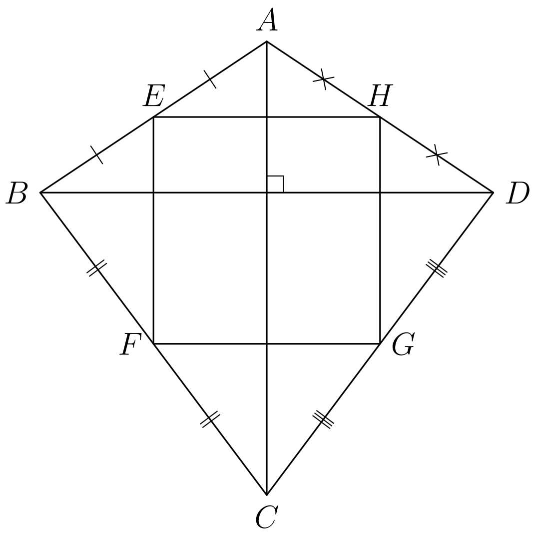


□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh tứ giác $HEFG$ là hình chữ nhật.

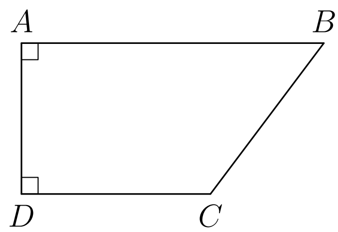
Lời giải.



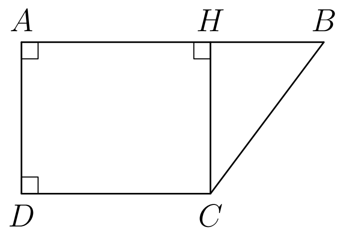
- Xét $\triangle ABD$ có EH là đường trung bình.
  $\Rightarrow EH \parallel BD$ và $EH = \dfrac{1}{2}BD$. (1)
- Xét $\triangle CBD$ có FG là đường trung bình.
  $\Rightarrow FG \parallel BD$ và $FG = \dfrac{1}{2}BD$. (2)
- Từ (1) và (2) $\Rightarrow EFGH$ là hình bình hành.(3)
- Xét $\triangle BAC$ có EF là đường trung bình.
  $\Rightarrow EF \parallel AC$.
- Mà $AC \perp BD$ và $BD \parallel FG$
  $\Rightarrow EF \perp FG$. (4)
- Từ (3) và (4) $\Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật.

□

Bài 2.
Tìm độ dài CD trong hình vẽ bên, biết $AB = 9$ cm, $AD = 4$ cm, $BC = 5$ cm.



Lời giải.



- Kẻ $CH \perp AB$, ta có $ADCH$ là hình chữ nhật nên $AD = CH = 4$ cm, $CD = AH$.
- Xét $\triangle CHB$ vuông tại H có $HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 3$ cm.

$\Rightarrow CD = AH = AB - HB = 6$ cm.

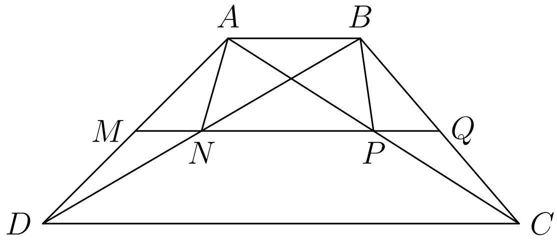
□

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC.

1. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng;
2. Chứng minh tứ giác $ABPN$ là hình thang cân;
3. Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để $ABPN$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

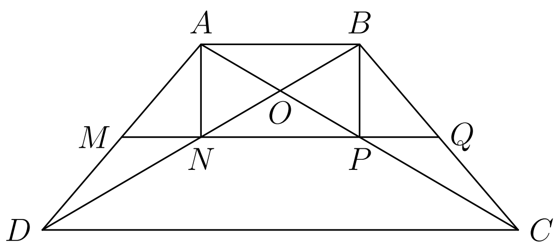
a)



- Xét $\triangle DAB$ có MN là đường trung bình.
  $\Rightarrow MN \parallel AB$ và $MN = \dfrac{1}{2}AB$. (1)
- Xét $\triangle ADC$ có MP là đường trung bình.
  $\Rightarrow MP \parallel DC$ và $MP = \dfrac{1}{2}DC$. (2)
- Mà $AB \parallel DC$ do $ABCD$ là hình thang.
  $\Rightarrow MP \parallel AB$ (3).
- Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow$ M,N,P thẳng hàng.(I)
- Xét $\triangle CAB$ có PQ là đường trung bình.
  $\Rightarrow PQ \parallel AB$ và $PQ = \dfrac{1}{2}AB$. (4)
- Xét $\triangle BDC$ có QN là đường trung bình.
  $\Rightarrow NQ \parallel DC$ và $NQ = \dfrac{1}{2}DC$. (5)
- Mà $AB \parallel DC$ do $ABCD$ là hình thang.
  $\Rightarrow NQ \parallel AB$ (6).
- Từ (4), (5) và (6) $\Rightarrow N, P, Q$ thẳng hàng. (II)
  Từ (I) và (II) $\Rightarrow M, N, P, Q$ thẳng hàng.

b)
- Ta có $MP \parallel AB \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow ABPN$ là hình thang.(7)
- Xét $\triangle AMN$ và $\triangle BPQ$ có:
  $$\begin{cases} MN = PQ(= \dfrac{1}{2}AB) \\ \widehat{AMN} = \widehat{BQP} \text{ (do } \widehat{AMN} = \widehat{ADC}, \widehat{BQP} = \widehat{BCD} \text{ mà } ABCD \text{ là hình thang cân)} \\ AM = BQ \left(= \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC}{2}\right) \end{cases}$$
  $\Rightarrow \triangle AMN = \triangle BPQ$ (c-g-c)
  $\Rightarrow AN = BP$ (8)
  Từ (7) và (8) $\Rightarrow ABPN$ là hình thang cân.

c)

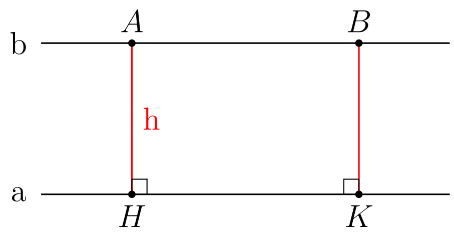


- Gọi O là giao điểm của AC và BD.
  Để $ABPN$ là hình chữ nhật ta cần $\widehat{ANP} = 90^\circ$ nên $\triangle ANP$ là tam giác vuông $AB = NP$.
  Mà ta có $MN = \dfrac{1}{2}AB$ và $PQ = \dfrac{1}{2}AB$.
  $\Rightarrow MQ = 2AB$.
- Xét $ABCD$ có MQ là đường trung bình.
  $\Rightarrow MQ = \dfrac{AB + CD}{2}$.
  $\Rightarrow 2AB = \dfrac{AB + CD}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{1}{3}CD$.

□

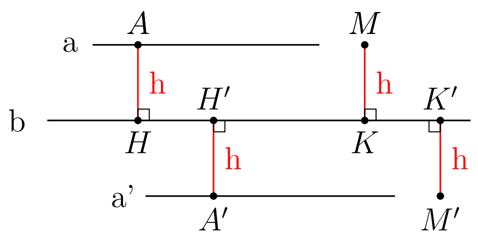
§9 Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

Định nghĩa 13. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.



Khoảng cách giữa a và b là độ dài đoạn AH hoặc độ dài đoạn BK.

Tính chất 7. Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h.



⚠ **18.** Nhận xét: Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.

1. Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

2. Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

1 Bài tập và các dạng toán

Dạng 22. Phát biểu cơ bản về tập hợp điểm

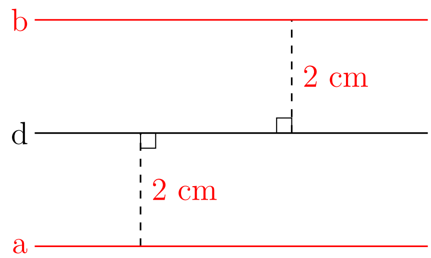
Vận dụng các tính chất để chỉ ra hình dạng của tập hợp các điểm cùng thỏa mãn một điều kiện nào đó.

BÀI TẬP MẪU

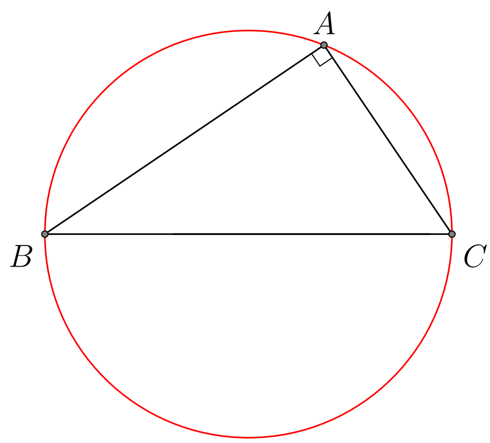
Ví dụ 1.
1. Cho đường thẳng d cố định và điểm A thay đổi cách d một khoảng bằng 2 cm. Tìm tập hợp điểm A.
2. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC cố định. Tìm tập hợp đỉnh A.
3. Tìm tập hợp các điểm nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc.

Lời giải.

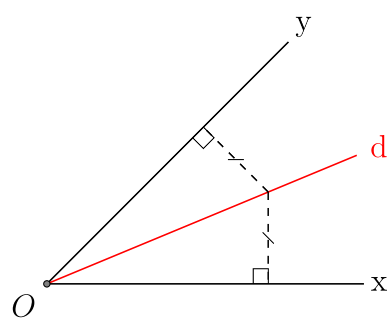
1. Tập hợp điểm A là hai đường thẳng song song với d và cách d một khoảng bằng 2 cm.



2. Theo giả thiết: $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên là góc chắn nửa đường tròn đường kính BC.
Vậy tập hợp điểm A là đường tròn đường kính BC.



3. Theo định lí: Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.
Vậy tập hợp điểm A cần tìm là tia phân giác của góc xOy.



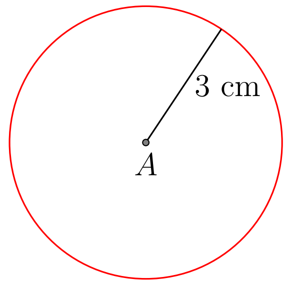
□

Ví dụ 2.
1. Tìm tập hợp các điểm cách điểm A cố định một khoảng bằng 3 cm.
2. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng AB cố định.
3. Tìm tập hợp O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh BC cố định.

Lời giải.

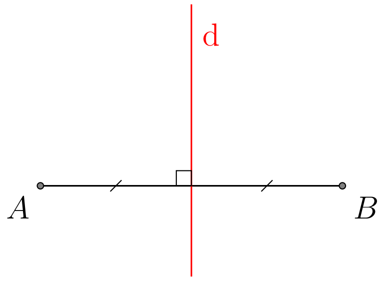
1.

Theo định nghĩa: Đường tròn là hình gồm các điểm cách một điểm cố định, một khoảng không đổi.
Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường tròn tâm A, bán kính bằng 3 cm.



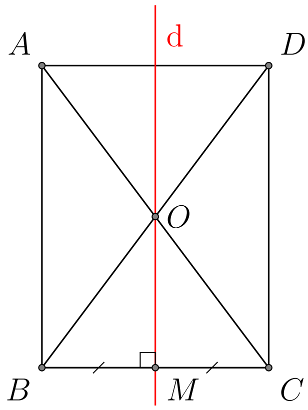
2.

Theo định lí: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.
Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



3.

Vì O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật nên $OB = OC$.
Vậy tập hợp điểm O là đường trung trực của đoạn thẳng BC và không trùng với trung điểm của BC.

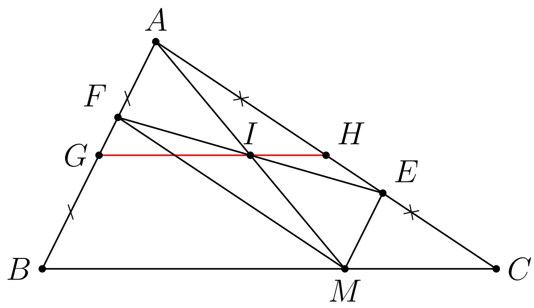


□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Lấy M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Từ M kẻ các đường thẳng lần lượt song song với AB, AC cắt AB, AC theo thứ tự tại E, F. Gọi I là trung điểm của EF. Điểm I di chuyển trên đường nào nếu M di chuyển trên BC và M không trùng với B, C.

Lời giải.

Tứ giác $AEMF$ có $AF \parallel EM$, $AE \parallel FM$ nên là hình bình hành.
Khi đó giao điểm I của hai đường chéo là trung điểm của AM.
Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AB, AC thì GH là đường trung bình của $\triangle ABC$.
Do đó I nằm trên đoạn thẳng GH.
Vậy khi M di chuyển trên cạnh BC thì I di chuyển trên đoạn GH và vì M không trùng với B, C nên I không trùng với G, H.

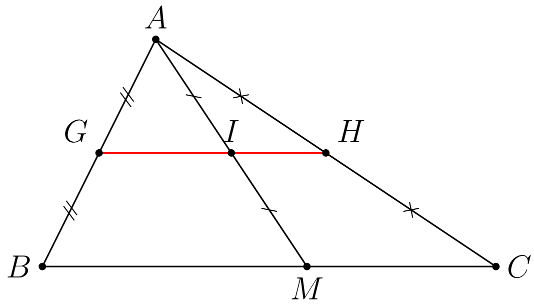


□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trên cạnh BC. Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì trung điểm I của đoạn thẳng AM di chuyển trên đường nào?

Lời giải.

Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AB, AC thì GH là đường trung bình của $\triangle ABC$.
Do đó GH đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AM.
Vậy khi M di chuyển trên cạnh BC thì I di chuyển trên đoạn GH (nếu $M \equiv B$ thì $I \equiv G$, nếu $M \equiv C$ thì $I \equiv H$).



□

Dạng 23. Sử dụng tập hợp các điểm để chứng minh các quan hệ hình học

Vận dụng các nhận xét về tập hợp điểm để chứng minh các quan hệ bằng nhau, song song, vuông góc,...

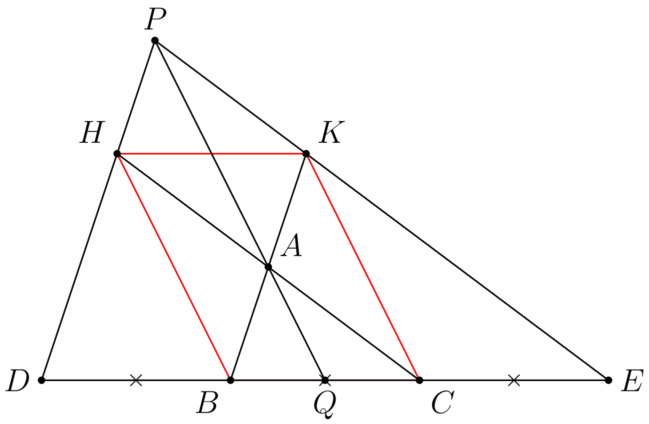
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BC = CE$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở H, qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB ở K, DH cắt EK ở P. Tia PA cắt BC ở Q. Chứng minh:

a) Tứ giác $BHKC$ là hình bình hành;

b) Q là trung điểm của BC.

Lời giải.



1. $\triangle CDH$ có $AB \parallel DH$ và B là trung điểm của CD nên A là trung điểm của CH.
   $\triangle BKE$ có $AC \parallel KE$ và C là trung điểm của BE nên A là trung điểm của BK.
   Tứ giác $BHKC$ có hai đường chéo CH và BK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

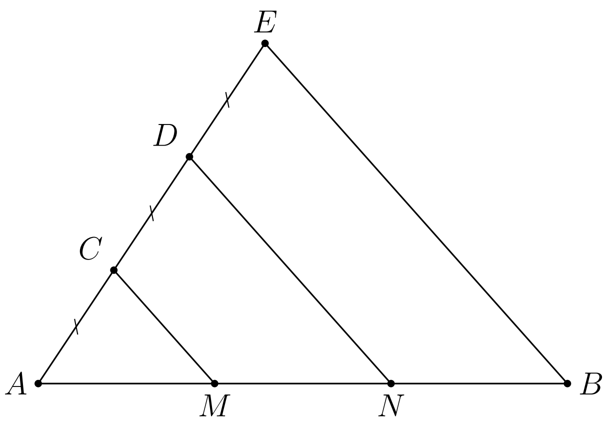
2. Vì $AB \parallel PD$ nên $\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{QB}{BD}$ và $AC \parallel PE$ nên $\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{QC}{CE}$.
   Suy ra $\dfrac{QB}{BD} = \dfrac{QC}{CE}$ mà $BD = CE$ nên $QB = QC$, hay Q là trung điểm của BC.

□

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Ax bất kì, lấy các điểm C, D, E sao cho $AC = CD = DE$. Qua C và D kẻ các đường thẳng song song với BE. Chứng minh đoạn thẳng AB bị chia thành ba phần bằng nhau.

Lời giải.

Vì $CM \parallel DN \parallel BE$ và $AC = CD = DE$.
Nên CM, DN, BE song song và cách đều nhau.
Do đó $AM = MN = NB$.
Hay AB bị chia thành ba phần bằng nhau.



□

2 Bài tập về nhà

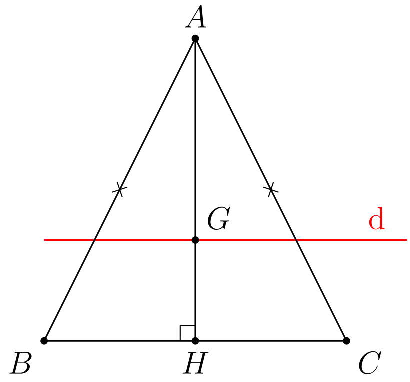
Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Hỏi điểm G di chuyển trên đường nào biết $AH = 3$ cm.

Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến.

Và G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $GH = \dfrac{1}{3}AH = 1$ cm.

Vậy G di chuyển trên đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng là 1 cm.

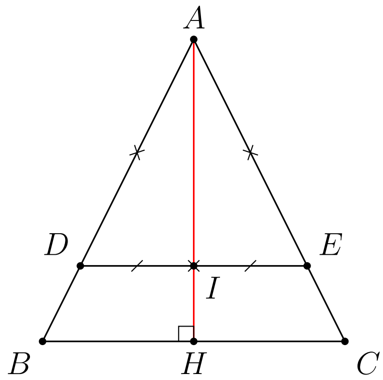


□

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên cạnh AB, AC sao cho $AD = AE$. Trung điểm I của đoạn thẳng DE di chuyển trên đường nào?

Lời giải.

Vì $AD = AE$ nên $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, suy ra $DE \parallel BC$.
Dựng đường cao AH của $\triangle ABC$, khi đó $AH \perp DE$.
Mà $\triangle ADE$ cân tại A (do $AD = AE$).
Nên đường trung tuyến AI cũng là đường cao, nghĩa là $AI \perp DE$.
Do đó I nằm trên đoạn thẳng AH.
Vậy khi D, E lần lượt di chuyển trên cạnh AB, AC thì I di chuyển trên đoạn AH (nếu $D \equiv B$ và $E \equiv C$ thì $I \equiv H$, nếu $D \equiv E \equiv A$ thì $I \equiv A$).

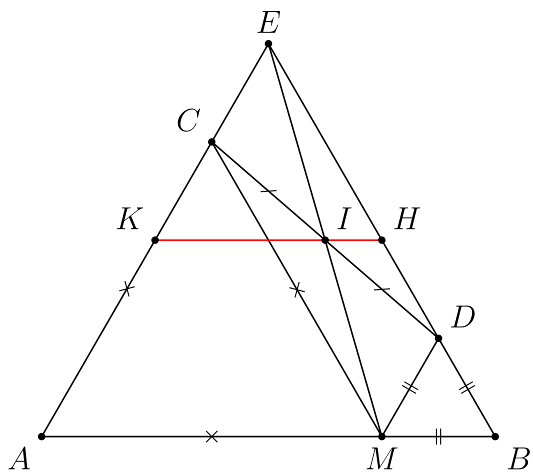


□

Bài 3. Cho đoạn thẳng AB, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB. Vẽ về cùng một phía của nửa mặt phẳng bờ AB các tam giác đều AMC và BMD. Trung điểm I của đoạn CD di chuyển trên đường nào?

Lời giải.

Gọi E là giao điểm của AC và BD.
Tứ giác $CMDE$ có $CE \parallel DM$ và $CM \parallel DE$.
Nên $CMDE$ là hình bình hành.
Khi đó trung điểm I của CD cũng là trung điểm của EM.
Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AE, BE.
Lúc này, KH là đường trung bình của $\triangle ABE$.
Nên I nằm trên KH.
Vậy khi M di chuyển trên đoạn AB thì I di chuyển trên đoạn KH (nếu $M \equiv A$ thì $I \equiv K$, nếu $M \equiv B$ thì $I \equiv H$).

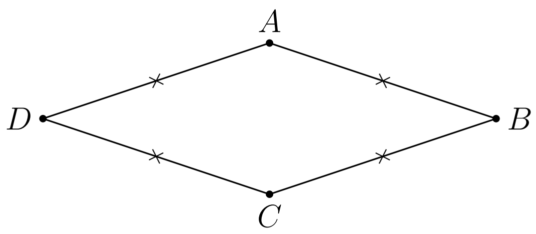


□

§10 Hình thoi

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 14. Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.



Tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow AB = BC = CD = DA$.

⚠ **19.** Nhận xét: Hình thoi là một hình bình hành đặc biệt.

Tính chất 8.

1. Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.
2. *Tính chất đặc trưng:* Trong hình thoi:
   - ☑ Hai đường chéo vuông góc với nhau;
   - ☑ Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi.

Hệ quả 1.

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi;
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi;
3. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi;
4. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 24. Chứng minh tứ giác là hình thoi

Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi.

BÀI TẬP MẪU

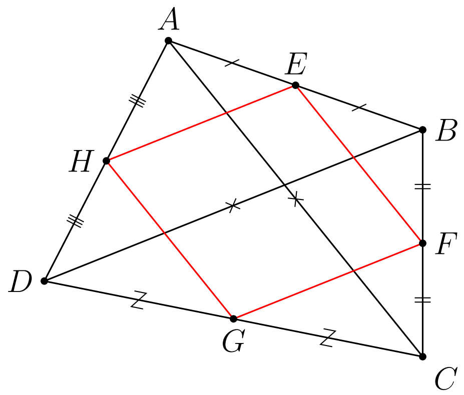
Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$, gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DA. Chứng minh rằng $EFGH$ là hình thoi.

Lời giải.

$\triangle ABD$ có EH là đường trung bình nên $EH = \dfrac{BD}{2}$.
Hoàn toàn tương tự, xét các tam giác BCD, ACD, ABC, ta được

$$GF = \frac{BD}{2}; \quad EF = \frac{AC}{2}; \quad GH = \frac{AC}{2}.$$

Lại có $AC = BD$ nên $EH = EF = GF = GH$.
Do đó $EFGH$ là hình thoi.

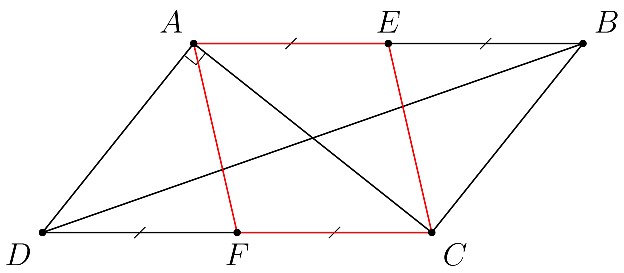


□

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có AC vuông góc với AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh tứ giác $AECF$ là hình thoi.

Lời giải.

Hình bình hành $ABCD$ có $AD \parallel BC$ và $AD \perp AC$.
Suy ra $BC \perp AC$.
$\triangle ACD$ vuông tại A có AF là đường trung tuyến, nên $AF = CF = \dfrac{CD}{2}$.
$\triangle ABC$ vuông tại C có CE là đường trung tuyến, nên $CE = AE = \dfrac{AB}{2}$.
Lại có $AB = CD$ (do $ABCD$ là hình bình hành),
Vậy $AF = CF = CE = AE$, hay $AECF$ là hình thoi.



□

Dạng 25. Vận dụng tính chất của hình thoi để tính toán và chứng minh các tính chất hình học

Vận dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình thoi.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O. Độ dài $AC = 8$ cm, $BD = 10$ cm. Tính độ dài cạnh hình thoi. **ĐS:** $\sqrt{41}$ cm

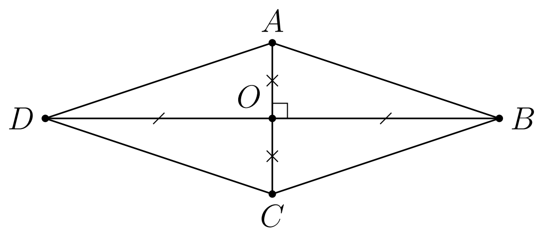
Lời giải.

Theo tính chất của hình thoi:

$$OA = \frac{AC}{2} = 4 \text{ cm và } OB = \frac{BD}{2} = 5 \text{ cm.}$$

Và $\triangle OAB$ vuông tại O nên áp dụng Định lí Pytago ta có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{41} \text{ cm.}$$



□

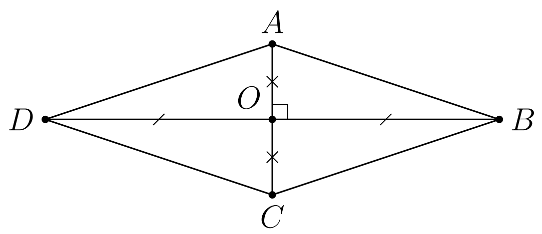
Ví dụ 2. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O. Độ dài $OA = 8$ cm, $OB = 6$ cm. Tính độ dài cạnh hình thoi. **ĐS:** 10 cm

Lời giải.

$ABCD$ là hình thoi nên $\triangle OAB$ vuông tại O.

Áp dụng Định lí Pytago ta có

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 10 \text{ cm.}$$



□

Ví dụ 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{B} = 60^\circ$. Kẻ $AE \perp DC$, $AF \perp BC$. Chứng minh:

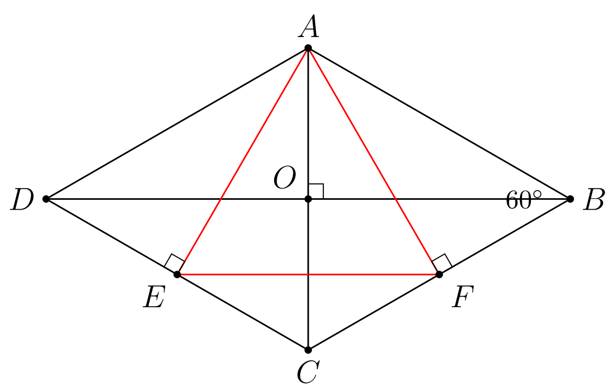
a) $AE = AF$;

b) Tam giác AEF đều.

Lời giải.

1. Vì AC là phân giác của $\widehat{BCD}$ (do $ABCD$ là hình thoi)
nên A cách đều hai cạnh BC và CD.
Hay $AE = AF$.

2. Hình thoi $ABCD$ có $AB = BC$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều.
Do đó đường cao AF cũng là đường phân giác, suy ra $\widehat{CAF} = 30^\circ$.
Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $\widehat{CAE} = 30^\circ$.
Suy ra $\widehat{EAF} = 60^\circ$, vậy $\triangle AEF$ đều.



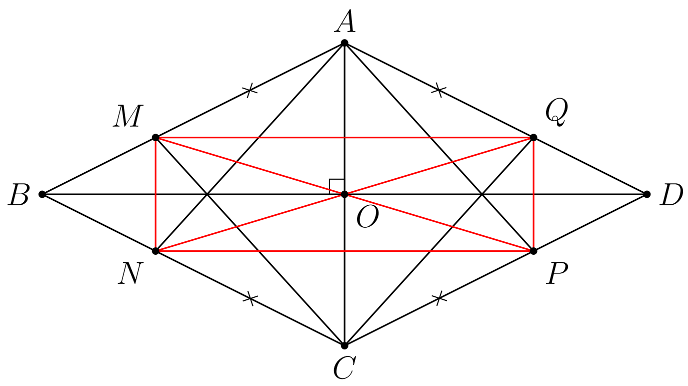
□

Ví dụ 4. Cho hình thoi $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = CN = CP = AQ$. Chứng minh:

a) M, O, P thẳng hàng và N, O, Q thẳng hàng;

b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải.



1. Tứ giác $AMCP$ có $AM = CP$ và $AM \parallel CP$ (hình thoi $ABCD$) nên là hình bình hành.
Mà O là trung điểm AC (hình thoi $ABCD$) nên O là trung điểm MP.
Tứ giác $ANCQ$ có $AQ = CN$ và $AQ \parallel CN$ (hình thoi $ABCD$) nên là hình bình hành.
Mà O là trung điểm BD (vì hình thoi $ABCD$) nên O là trung điểm NQ.
Vậy M, O, P thẳng hàng và N, O, Q thẳng hàng.

2. Tứ giác $MNPQ$ có MP cắt NQ tại trung điểm O của mỗi đường nên là hình bình hành.
Hình thoi $ABCD$ có AC là phân giác của $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$, suy ra $OM = OQ$ và $ON = OP$.
Do đó $OM + OP = ON + OQ$ hay $MP = NQ$, hay $MNPQ$ là hình chữ nhật.

□

Dạng 26. Tìm điều kiện để tứ giác là hình thoi

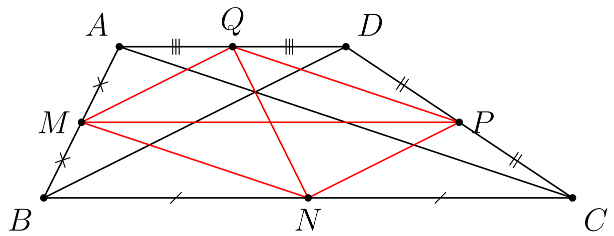
Vận dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình thoi.

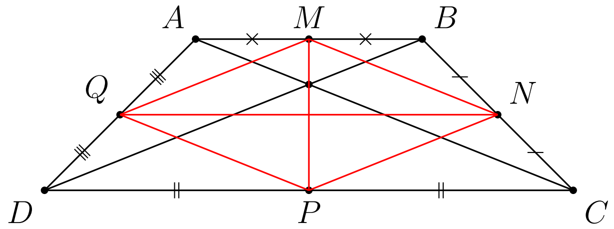
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh rằng, trong hình thang:

1. Chứng minh: trong hình thang, trung điểm của hai đường chéo và hai cạnh đáy là bốn đỉnh của một hình bình hành;
2. Hình thang phải có thêm điều kiện gì để trung điểm của hai đường chéo và hai cạnh đáy là bốn đỉnh của hình thoi.

Lời giải.





1. Giả sử $ABCD$ là hình thang và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.
   $\triangle ABD$ có MQ là đường trung bình nên $MQ \parallel BD$ và $MQ = \dfrac{BD}{2}$.
   $\triangle BCD$ có PN là đường trung bình nên $PN \parallel BD$ và $PN = \dfrac{BD}{2}$.
   Suy ra $MQ \parallel PN$ và $MQ = PN$, do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

2. $\triangle ACD$ có PQ là đường trung bình nên $PQ = \dfrac{AC}{2}$.
   Để hình bình hành $MNPQ$ là hình thoi thì $MQ = MN$, nghĩa là $BD = AC$.
   Khi đó hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

□

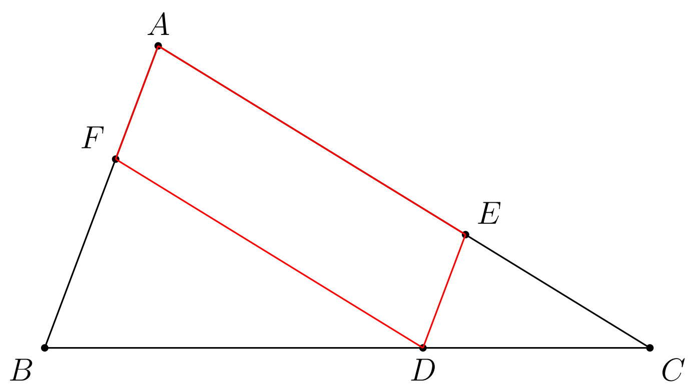
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, qua điểm D thuộc cạnh BC, kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB theo lần lượt ở E và F.

1. Tứ giác $AEDF$ là hình gì?

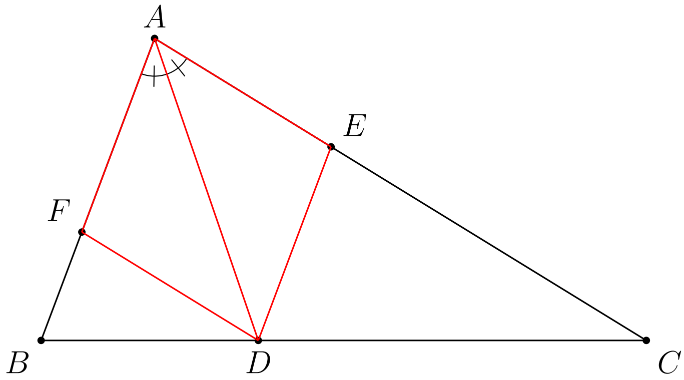
2. Điểm D ở vị trí nào trên BC thì $ADEF$ là hình thoi.

Lời giải.

1. Tứ giác $AEDF$ có $AF \parallel DE$ và $AE \parallel DF$ nên là hình bình hành.



2. Để hình bình hành $AEDF$ là hình thoi thì AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.



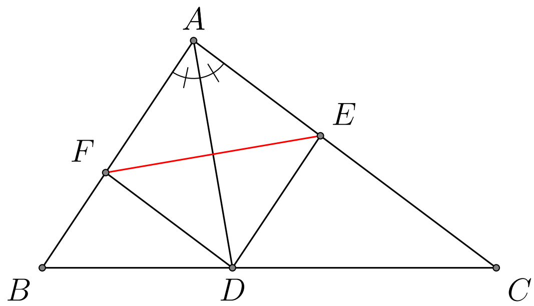
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC, phân giác AD. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E, qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F. Chứng minh EF là phân giác của $\widehat{AED}$.

Lời giải.

Tứ giác $AEDF$ có $AF \parallel DE$ và $AE \parallel DF$ nên là hình bình hành.
Mặc khác đường chéo AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $AEDF$ là hình thoi.
Do đó đường chéo EF là phân giác của $\widehat{AED}$.



□

Bài 2.

1. Cạnh của một hình thoi bằng 25, một đường chéo bằng 14. Tính độ dài đường chéo còn lại.

ĐS: 48 cm

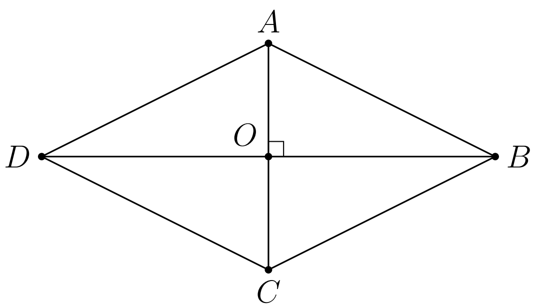
2. Cho hình thoi $DEFG$ như hình vẽ bên. Tính x. **ĐS:** $x = 55°$

Lời giải.

1. Hình thoi $ABCD$ có $AC = 14$ và $AB = 25$.
Áp dụng các tính chất của hình thoi, ta có

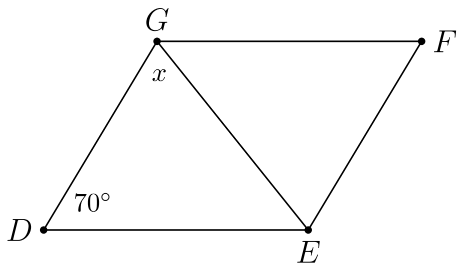
$$OA = \frac{AC}{2} = 7; \quad OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 24.$$

Suy ra $BD = 2OB = 48$.



2.

Vì $DEFG$ là hình thoi và $\widehat{D} = 70^\circ$
nên $\widehat{DGF} = 180^\circ - \widehat{D} = 110^\circ$.
Hơn nữa, GE là phân giác của $\widehat{DEF}$ (hình thoi $DEFG$)
do đó $x = \widehat{DGE} = \dfrac{1}{2}\widehat{DEF} = 55^\circ$.



□

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh:

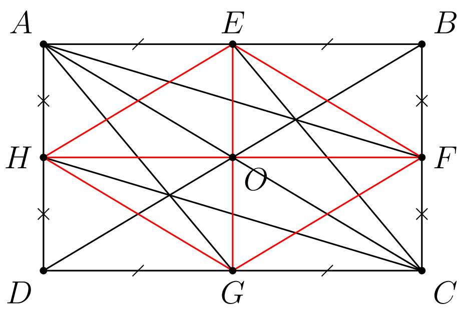
a) $EFGH$ là hình thoi.

b) AC, BD, EG, FH đồng quy.

Lời giải.

1.

$\triangle ABC$ có EF là đường trung bình nên $EF \parallel AC$ và $EF = \dfrac{AC}{2}$.
$\triangle ACD$ có GH là đường trung bình nên $GH \parallel AC$ và $GH = \dfrac{AC}{2}$.
Suy ra $EF \parallel GH$ và $EF = GH$. Do đó $EFGH$ là hình bình hành.



Hơn nữa, $\triangle ABD$ có EH là đường trung bình nên $EH = \dfrac{BD}{2}$.
Mà $AC = BD$ (hình chữ nhật $ABCD$) nên $EF = EH$, suy ra $EFGH$ là hình thoi.

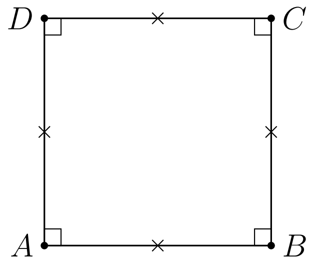
2. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AE \parallel CG$ và $AE = CG$.
Do đó tứ giác $AECG$ là hình bình hành.
Mà O là trung điểm của đường chéo AC (trong hình chữ nhật $ABCD$).
Nên O cũng là trung điểm của đường chéo EG.
Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $AHCF$ là hình bình hành.
Và suy ra O cũng là trung điểm của đường chéo HF.
Vậy AC, BD, CD, DA đồng quy tại O.

□

§11 Hình vuông

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 15. Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.



Tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$.

⚠ **20.** Nhận xét:

1. Hình vuông là một hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
2. Hình vuông là hình thoi có bốn góc bằng nhau.

Như vậy, hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

Tính chất 9.

1. Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.
2. *Tính chất đặc trưng:* Trong hình vuông hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường.

Hệ quả 2.

1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.
4. Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

⚠ **21.** Nhận xét: Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 27. Chứng minh tứ giác là hình vuông

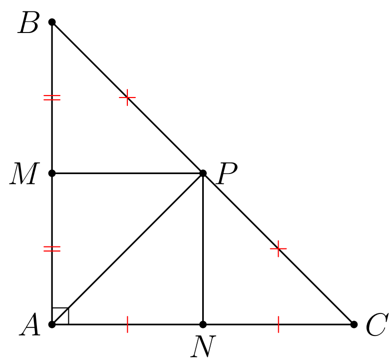
Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N là trung điểm AB, AC. Qua M kẻ đường thẳng song song AC và cắt BC tại P. Chứng minh rằng $AMPN$ là hình vuông.

Lời giải.

Ta có M là trung điểm của AB, $MP \parallel AC \Rightarrow MP$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow P$ là trung điểm của BC.
Mà N là trung điểm của $AC \Rightarrow NP$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow AMPN$ là hình bình hành.
Mà $\widehat{MAN} = 90^\circ \Rightarrow AMPN$ là hình chữ nhật. Mà $AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AC}{2} = AN \Rightarrow AMPN$ là hình vuông.

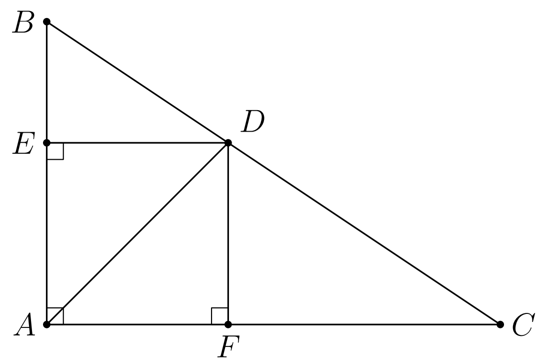


□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi AD là đường phân giác của góc A (D thuộc BC), từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC. Chứng minh rằng $AEDF$ là hình vuông.

Lời giải.

Xét tứ giác $AEDF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AFD} = \widehat{AED} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật.
Mà AD là đường chéo đồng thời là đường phân giác nên tứ giác $AEDF$ là hình vuông.



□

Dạng 28. Vận dụng tính chất của hình vuông để chứng minh các tính chất hình học

Sử dụng định nghĩa và các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình vuông.

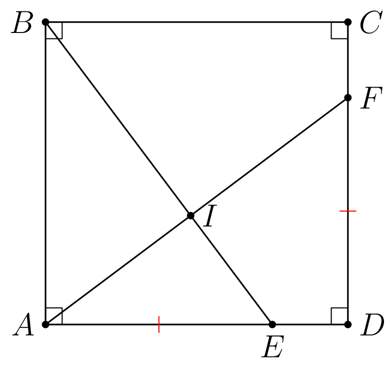
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Chứng minh:

a) Các tam giác ADF và BAE bằng nhau. b) $BE \perp AF$.

Lời giải.

1. Có $\triangle ADF = \triangle BAE$ (c.g.c)
2. Gọi I là giao điểm của AF và BE. Ta có $\widehat{AEI} = \widehat{DFA}$.
   Có $\widehat{EAI} + \widehat{AEI} = \widehat{EAI} + \widehat{DFA} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AF$.



□

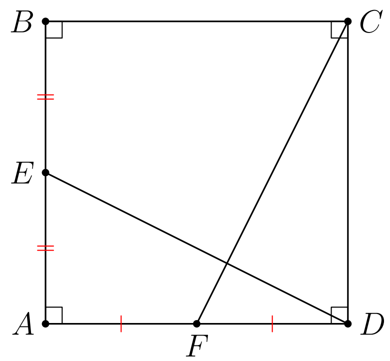
Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD. Chứng minh:

a) $DE = CF$.

b) $DE \perp CF$.

Lời giải.

1. Có $\triangle AED = \triangle CFD$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = DF$.
2. Do $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$ (góc tương ứng), ta có:
   $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = \widehat{CDF} = \widehat{EDC} + \widehat{DCF} = 90^\circ$
   $\Rightarrow BE \perp AF$.



□

Dạng 29. Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông

Sử dụng định nghĩa, các tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình vuông.

BÀI TẬP MẪU

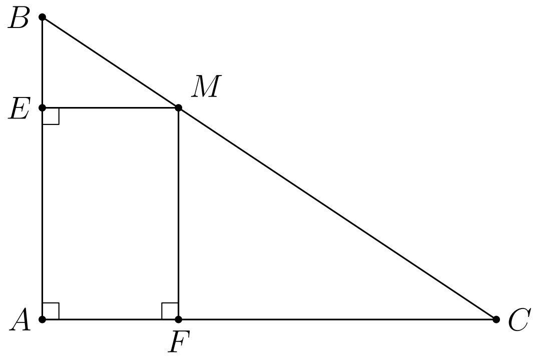
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AC, AB theo thứ tự tại E và F.

1. Tứ giác $AFME$ là hình gì?
2. Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác $AFME$ là hình vuông.

Lời giải.

1. Tứ giác $AFME$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AEM} = \widehat{MFA} = 90^\circ$ nên tứ giác $AFME$ là hình chữ nhật.

2. Để tứ giác $AFME$ là hình vuông thì đường chéo AM trở thành đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ $\Rightarrow$ M là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với BC.



□

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là:

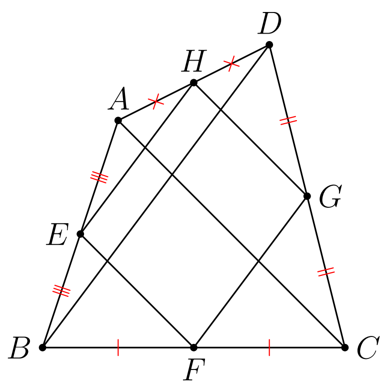
a) Hình chữ nhật. b) Hình thoi. c) Hình vuông.

Lời giải.

1. Dễ dàng chứng minh được tứ giác $EFGH$ là hình bình hành vì có các cặp cạnh đối song song với nhau.
Để $EFGH$ là hình chữ nhật thì EF phải vuông góc với FG $\Rightarrow$ Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

2. Để $EFGH$ là hình thoi thì $EF = FG \Rightarrow ABCD$ có $AC = BD$.

3. Để $EFGH$ là hình vuông thì phải có EF phải vuông góc với FG và $EF = FG \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc và bằng nhau.



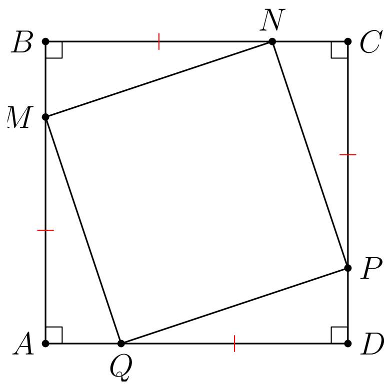
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$, trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Chứng minh $MNPQ$ là hình vuông.

Lời giải.

Bốn tam giác AQM, BNM, CPN, DQP bằng nhau $\Rightarrow QM = MN = NP = PQ \Rightarrow$ Tứ giác $QMNP$ là hình thoi.
Có $\triangle MBN = \triangle NCP$ nên $\widehat{BMN} = \widehat{CNP}$.
Mặt khác, $\widehat{BNM} + \widehat{BMN} = 90^\circ = \widehat{BNM} + \widehat{CNP} \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ$.
Vậy hình thoi $QMNP$ có một góc vuông nên tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.



□

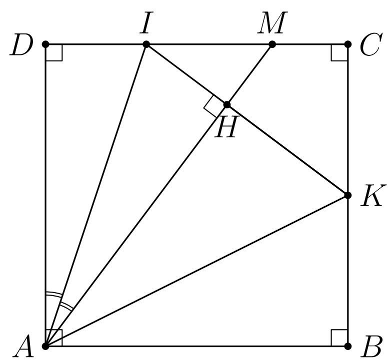
Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M bất kì trên cạnh DC. Tia phân giác $\widehat{MAD}$ cắt CD tại I. Kẻ IH vuông góc với AM tại H. Tia IH cắt BC tại K. Chứng minh:

a) $\triangle ABK = \triangle AHK$.

b) $\widehat{IAK} = 45^\circ$.

Lời giải.

1. Dễ dàng chứng minh $\triangle ADI = \triangle AHI \Rightarrow AD = AH$. Suy ra $\triangle ABK = \triangle AHK$.
2. Ta có $\widehat{IAH} = \dfrac{1}{2}\widehat{DAH}$; $\widehat{HAK} = \dfrac{1}{2}\widehat{HAB}$.
   Mà $\widehat{DAH} + \widehat{HAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAH} + \widehat{HAK} = \widehat{IAK} = 45^\circ$.



□

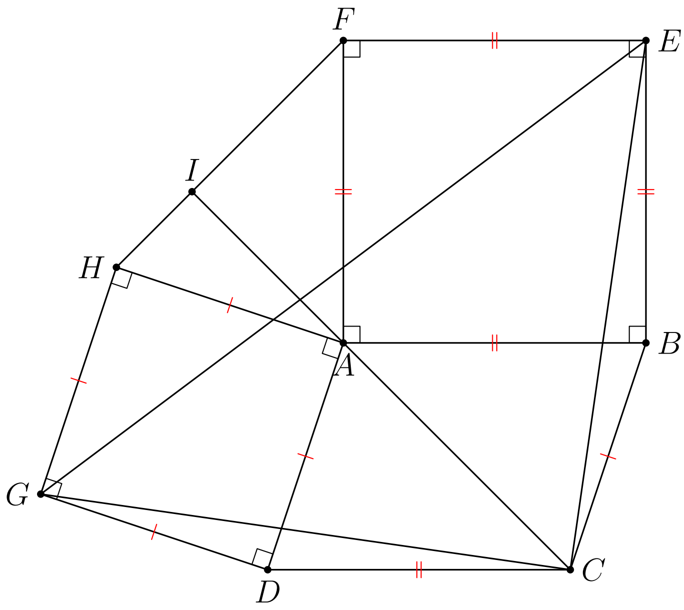
Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông $ABEF$ và $ADGH$. Chứng minh:

a) $AC = FH$.

b) $AC \perp FH$.

c) CEG là tam giác vuông cân.

Lời giải.



1. Dễ dàng chứng minh $\triangle AFH = \triangle BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow FH = AC$.

2. Gọi giao điểm của AC và FH là I.
Do $\widehat{AFH} = \widehat{BAC}$, ta có $\widehat{IAF} + \widehat{AFH} = \widehat{IAF} + \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp FH$.

3. Chứng minh được $\triangle GCD = \triangle CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow GC = CE$.
Ta có $180^\circ = \widehat{ECB} + \widehat{CBE} + \widehat{BEC} = \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + 90^\circ + \widehat{BEC}$
$\Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{BEC} = 90^\circ$, mà $\widehat{BEC} = \widehat{GCD} \Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{GCD} = 90^\circ \quad (1)$.
Mặt khác, do $ABCD$ là hình bình hành nên $\widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 180^\circ$. Hay $\widehat{ECB} + \widehat{GCE} + \widehat{GCD} + \widehat{CBA} = 180^\circ \quad (2)$.
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{GCE} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEG$ vuông cân.

□

§12 Ôn tập chương 1

1 Bài tập và các dạng toán

2 Tóm tắt lý thuyết

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 11.

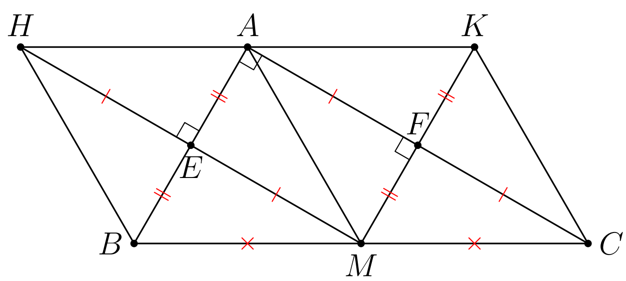
3 Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB, E là giao điểm của MH và AB. Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC, F là giao điểm của MK và AC.

1. Các tứ giác $AEMF$, $AMBH$, $AMCK$ là hình gì? Vì sao?
2. Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A.
3. Tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện gì thì tứ giác $AEMF$ là hình vuông?

Lời giải.

1. Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật. Các tứ giác $AMBH$, $AMCK$ là hình thoi.
2. Theo a) suy ra $HA \parallel BC$, $AK \parallel MC \Rightarrow H, A, K$ thẳng hàng. Lại có $AH = AM = AK \Rightarrow H, K$ đối xứng với nhau qua A.
3. Để hình chữ nhật $AEMF$ là hình vuông thì cần thêm điều kiện $AE = EM$. $\Rightarrow AB = AC$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.



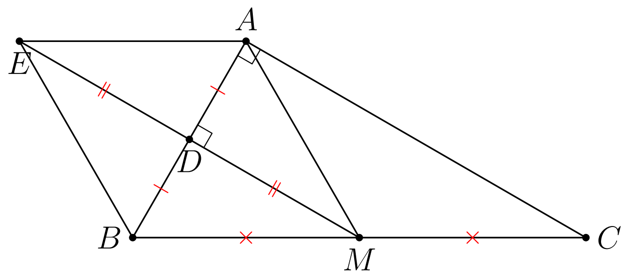
□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng của M qua D.

1. Chứng minh E đối xứng với M qua đường thẳng AB.
2. Các tứ giác $AEMC$, $AEBM$ là hình gì? Vì sao?

3. Tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện gì thì tứ giác $AEBM$ là hình vuông?

Lời giải.



1. Vì $MD \parallel AC$ nên $MD \perp AB \Rightarrow E$ đối xứng với M qua đường thẳng AB.

2. Có AB và EM cắt nhau tại trung điểm D của mỗi đường nên tứ giác $AEBM$ là hình bình hành. $\Rightarrow AE = BM = MC$. Vậy tứ giác $AEMC$ cũng là hình bình hành vì có $AE \parallel BM$ hay $AE \parallel MC$ và $AE = MC$.

3. Hình bình hành $AEBM$ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên là hình thoi. Để hình thoi $AEBM$ là hình vuông thì cần điều kiện $AB = EM$. Vì tứ giác $AEMC$ là hình bình hành nên $EM = AC$. Vậy nếu $AB = EM$ suy ra $AB = AC$. Lúc này tam giác ABC cân tại A. Vậy để tứ giác $AEBM$ là hình vuông thì tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện $AB = AC$ hay tam giác ABC vuông cân tại A.

□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có $BC = 2AB$, $\widehat{A} = 60°$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD. Vẽ I đối xứng với A qua B.

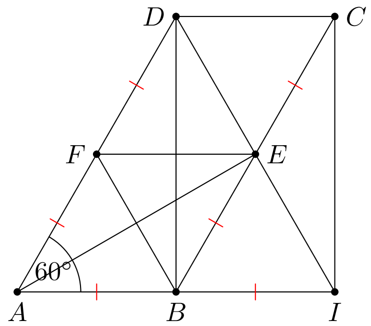
1. Tứ giác $ABEF$ là hình gì? Vì sao?

2. Chứng minh tứ giác $AIEF$ là hình thang cân.

3. Chứng minh $BICD$ là hình chữ nhật.

4. Tính góc $\widehat{AED}$.

Lời giải.



1. Vì $AB = EF = BF = AF = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ Tứ giác $ABEF$ là hình thoi.

2. Dễ thấy $EF \parallel AI$, $IB = BE$; $\widehat{IBE} = \widehat{IAD} = 60^\circ$
$\Rightarrow \triangle BIE$ đều. Do đó, $IE = AF$ suy ra $AIEF$ là hình thang cân.

3. $BEDF$ là hình thoi. Suy ra BD là đường phân giác trong của $\triangle ADI$.
Có $BI = AB = DC$ và $AB \parallel DC$ hay $BI \parallel DC$. Vậy tứ giác $BICD$ là hình bình hành vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
Thấy rằng BD vừa là đường trung tuyến, phân giác của $\triangle ADI$. Suy ra $BD \perp BI$ hay $\widehat{DBI} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BICD$ là hình chữ nhật vì là hình bình hành có một góc vuông.

4. Vì $BICD$ là hình chữ nhật nên E là trung điểm của DI. Ta có $\triangle DAI$ cân tại A, mà AE là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao. Suy ra $AE \perp DI$, vậy $\widehat{AED} = 90^\circ$.

□

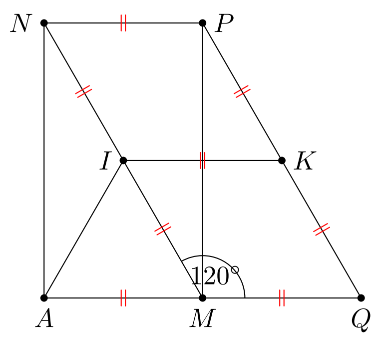
Bài 4. Cho hình bình hành $MNPQ$ có $MN = 2MQ$ và $\widehat{M} = 120^\circ$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN, PQ và A là điểm đối xứng của Q qua M.

1. Tứ giác $MIKQ$ là hình gì? Vì sao?

2. Chứng minh tam giác AMI đều.

3. Chứng minh tứ giác $AMPN$ là hình chữ nhật.

Lời giải.



1. Vì $MQ = IK = NP = \dfrac{MN}{2} = MI = IN = PK = KQ \Rightarrow$ Tứ giác $MIKQ$ là hình thoi.

2. Tam giác AMI có $AM = MI$ nên cân tại A và $\widehat{IMA} = 60^\circ$ nên $\triangle\ AMI$ là tam giác đều.

3. Dễ dàng nhận thấy tứ giác $AMPN$ là hình bình hành.
Vì tam giác AMI là tam giác đều nên $AI = IM = IN$. Vậy tam giác MAN có AI là đường trung tuyến và $AI = \dfrac{1}{2}MN$ nên tam giác MAN là tam giác vuông tại A (trong tam giác vuông trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).
Vậy hình bình hành $AMPN$ có một góc vuông nên tứ giác $AMPN$ là hình chữ nhật.

□

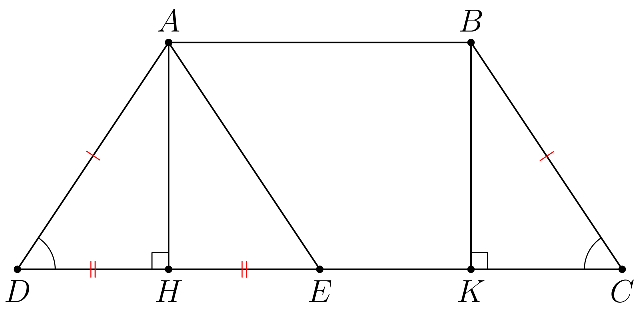
Bài 5. Cho hình thang cân $ABCD$ $(AB \parallel CD, AB < CD)$, các đường cao AH, BK.

1. Tứ giác $ABKH$ là hình gì? Vì sao?

2. Chứng minh $DH = CK$.

3. Gọi E là điểm đối xứng với D qua H. Các điểm D và E đối xứng với nhau qua đường nào?
4. Tứ giác $ABCE$ là hình gì?

Lời giải.



1. Tứ giác $ABKH$ là hình chữ nhật.
2. $\triangle ADH = \triangle BKC$ (ch - gn). Nên suy ra $DH = KC$.
3. D và E đối xứng với nhau qua đường thẳng AH.
4. Dễ thấy $HE + EK = EK + KC \Rightarrow AB = EC$. Do đó, $ABCE$ là hình bình hành.

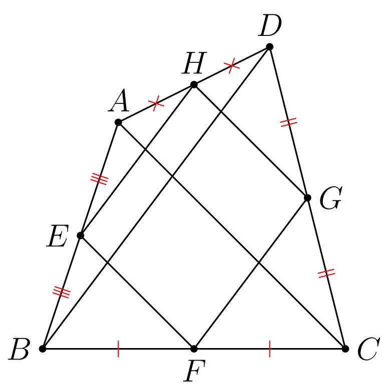
□

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$, E là trung điểm của cạnh AB. Qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC ở F. Qua F kẻ đường thẳng song song với BD cắt CD ở G. Qua G kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD ở H.

1. Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.
2. Tứ giác $ABCD$ cần thêm điều kiện gì để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

1. Có $EH \parallel BD \parallel FG$ và $EF \parallel AC \parallel HG$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành vì có các cặp đối song song với nhau.
2. Để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật thì $EH \perp HG$ hay $BD \perp AC$ vì $EH \parallel BD$ và $HG \parallel AC$. Vậy điều kiện để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ phải có hai đường chéo vuông góc.



□

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại B. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC. Kẻ Ex song song với BC cắt AB tại M.

1. Chứng minh tứ giác $BMEF$ là hình chữ nhật.
2. Gọi K đối xứng với B qua E. Tứ giác $BACK$ là hình gì? Vì sao?

3. Gọi G đối xứng với E qua F. Tứ giác $BGCE$ là hình gì? Vì sao?

4. Tam giác ABC cần thêm điều kiện gì để tứ giác $BGCE$ là hình vuông?

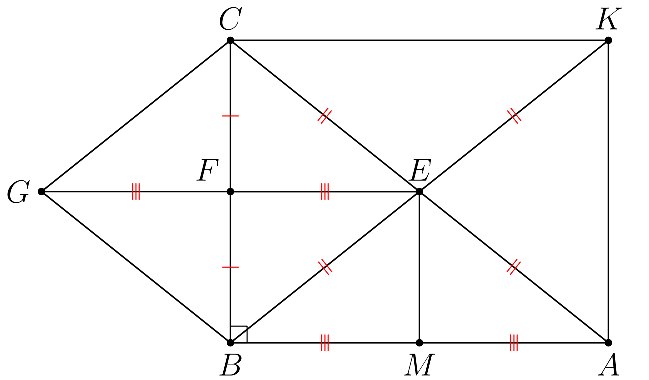
Lời giải.

1. Tứ giác $BMEF$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.

2. EF là đường trung bình của tam giác ABC.
$\Rightarrow EF \perp BC \Rightarrow BFE = 90^\circ \Rightarrow BMEF$ là hình chữ nhật. Tứ giác $BACK$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Lại có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên $BAKC$ là hình chữ nhật.

3. Tứ giác $BGCE$ là hình thoi vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và $BE = EC$.

4. Tam giác ABC vuông cân.



□

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông ở A. Gọi E, G, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC. Từ E kẻ đường thẳng song song với BF, đường thẳng này cắt GF tại I.

1. Tứ giác $AEGF$ là hình gì? Vì sao?

2. Chứng minh tứ giác $BEIF$ là hình bình hành.

3. Chứng minh tứ giác $AGCI$ là hình thoi.

4. Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác $AGCI$ là hình vuông.

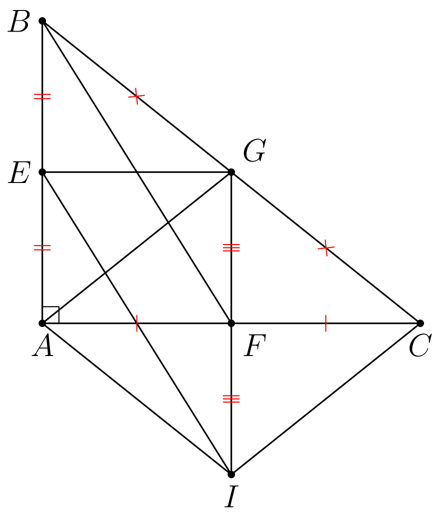
Lời giải.

1. Tứ giác $AEGF$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.

2. Có $GF \parallel AE$ hay $FI \parallel BE$. Vậy tứ giác $BEFI$ là hình bình hành vì có hai cặp cạnh đối song song.

3. Tứ giác $AGCI$ là hình thoi vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc với nhau ($\widehat{GFA} = 90^\circ$).

4. Để tứ giác $AGCI$ là hình vuông thì $\widehat{AGC} = 90^\circ$. Vậy tam giác ABC sẽ thành tam giác vuông cân tại A.



□

4 Bài tập về nhà

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC, kẻ MD vuông góc với AB tại D, ME vuông góc với AC tại E.

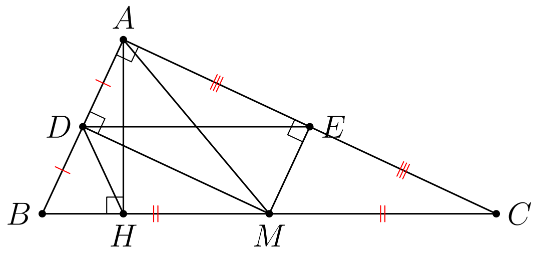
1. Chứng minh $AM = DE$.

2. Chứng minh tức giác $DMCE$ là hình bình hành.

3. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC $(H \in BC)$. Chứng minh tứ giác $DHME$ là hình thang cân và A đối xứng với H qua DE.

Lời giải.

1. Dễ thấy $ADME$ là hình chữ nhật, suy ra đpcm.
2. Dễ thấy $MD \parallel EC$, $MD = EC = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow$ đpcm.
3. $ME = DH = AD = \dfrac{1}{2}AB$; $HM \parallel DE$ nên $DHME$ là hình thang cân và A, H đối xứng với nhau qua DE.



□

Bài 10. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $AB = AD = \dfrac{1}{2}CD$, kẻ BH vuông góc với CD.

1. Chứng minh rằng tứ giác $ABHD$ là hình vuông.

2. Gọi M là trung điểm của BH. Chứng minh A đối xứng với C qua M.

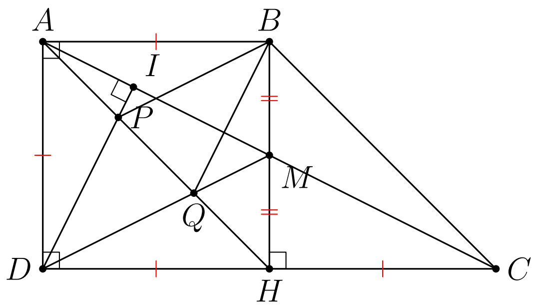
3. Kẻ DI vuông góc với AC. AH cắt DI, DM tại P và Q. Chứng minh tứ giác $DPBQ$ là hình thoi.

Lời giải.

1. $ABHD$ là hình vuông vì là hình chữ nhật và có hai cạnh kề bằng nhau.

2. Có $AB \parallel HC$ và $AB = HC = DH = \frac{1}{2}DC$ nên tứ giác $ABCH$ là hình bình hành. $\Rightarrow M$ là trung điểm của AC. Vậy A đối xứng với C qua M.

3. Có $\triangle APD = \triangle APB$ (c.g.c) nên $PD = PB$; $\triangle DHQ = \triangle BHQ$ (c.g.c) nên $DQ = QB$.
Lại có $\widehat{ADP} = \widehat{MCD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{DAC}$)
$\Rightarrow \widehat{ADP} = \widehat{QDH}$ (vì $\widehat{QDH} = \widehat{MCD}$).
Vậy $\triangle ADP = \triangle HDQ$ (g.c.g) $\Rightarrow DP = DQ$
$\Rightarrow$ Tứ giác $DPBQ$ là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau.



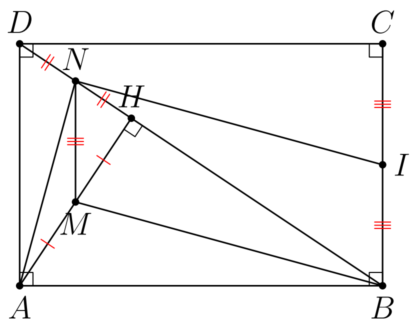
□

Bài 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AH và DH.

1. Chứng minh $MN \parallel AD$.
2. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh tứ giác $BMNI$ là hình bình hành.
3. Chứng minh tam giác ANI vuông.

Lời giải.

1. MN là đường trung bình của tam giác $AHD \Rightarrow MN \parallel AD$.
2. $MN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BI$; Mà $MN \parallel AD \parallel BC \Rightarrow BMNI$ là hình bình hành.
3. Dễ dàng chứng minh M là trực tâm của $\triangle ABN \Rightarrow BM \perp AN \Rightarrow IN \perp AN$. Vậy $\triangle ANI$ vuông tại N.

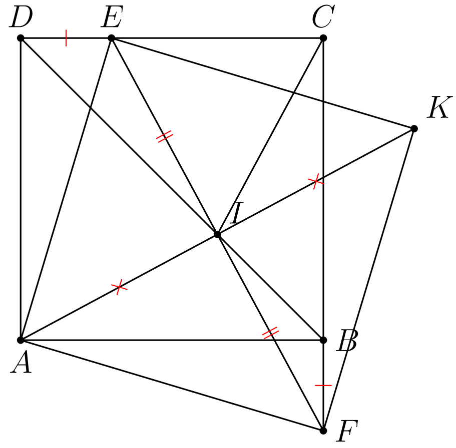


□

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$. E là điểm trên cạnh DC, F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho $BF = DE$.

1. Chứng minh tam giác AEF vuông cân.
2. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh I thuộc BD.
3. Lấy điểm K đối xứng với A qua I. Chứng minh tứ giác $AEKF$ là hình vuông.

Lời giải.



1. $\triangle ADE = \triangle ABF \Rightarrow AE = AF$; $\widehat{FAB} = \widehat{DAE}$. Dễ thấy $\widehat{DAE} + \widehat{EAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAB} + \widehat{EAB} = 90^\circ$. Do đó, $\triangle AEF$ là tam giác vuông cân tại A.
2. Chứng minh $AI = CI = \dfrac{1}{2}EF$. Do đó I nằm trên đường trung trực của AC. Mà BD là đường trung trực của AC (tính chất hình vuông $ABCD$) nên $I \in BD$.
3. Vì AEF là tam giác vuông cân nên $AI \perp EF$. Hơn nữa $AI = IK$ và $AI = \dfrac{1}{2}EF = IE = IF$ nên $\Rightarrow AI = IK = IE = IF$. Vậy tứ giác $AEKF$ là hình vuông.

$\square$