

Thời gian làm bài: 180 phút
(Lần 1, ngày 08/8/2022)

Bài 1. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $5n - 1$, $55n + 11$ là hai số chính phương và $55n^2 - 149$ là số nguyên tố.

Bài 2. Xét 100 số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$ có tính chất sau: $a_1 = a_{100} = 0$ và với mỗi số nguyên dương $2 \leq i \leq 99$ ta đều có $a_i > \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của a_{23} ?

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Điểm P thuộc cung nhỏ CD của (O) . M là trung điểm CD . Lấy Q thuộc đường thẳng AD sao cho PQ và PM vuông góc. Trên BQ lấy R sao cho PR vuông góc với CD .

- Chứng minh rằng PB và OM cắt nhau trên đường tròn đường kính QM .
- Chứng minh rằng tứ giác $PCRD$ và tam giác RAB có diện tích bằng nhau.
- Hỏi có tất cả bao nhiêu vị trí của P để $RA \perp RB$? Hãy giải thích.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \geq \frac{9abc(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)^2}$$

— HẾT —