CHUYÊN ĐỀ: TÍNH TỔNG DÃY SỐ CÓ QUY LUẬT

A.TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT.

Dạng 1: Tổng các số hạng cách đều $S=a_1+a_2+a_3+...+a_n$

Cần tính tổng: $S=a_1+a_2+a_3+...+a_n$. (1)

Với $a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_n-a_{n-1}=d$ (các số hạng cách đều nhau một giá trị d)

Số số hạng của tổng là $n=(a_n-a_1):d+1$ *với* a_1 *là số hạng thứ nhất*

a_n *là số hạng thứ* n.

Tổng $S=n(a_1+a_n):2$.

Số hạng thứ n *của dãy là* $a_n=a_1+(n-1)d$.

Ví dụ 1: Tính tổng $S=1+2+3+4+...+2019+2020$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=1$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $2020-1:1+1=2020$.

Tổng $S=1+2020.2020:2=2041210$.

Bài toán tổng quát: Tính tổng $S=1+2+3+...+n$.

Số số hạng của dãy là $n-1:1+1=n$.

Tổng $S=n+1\ n:2$.

Ví dụ 2: Tính tổng $S=1+3+5+...+2019+2021$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=2$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $2021-1:2+1=1011$.

Tổng $S=1+2021.1011:2=1022121$.

Ví dụ 3: Tính tổng $S=5+10+15+...+2015+2020$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=5$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $2020-5:5+1=404$.

Tổng $S=5+2020.404:2=409050$.

Ví dụ 4: Tính tổng $S=1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+...+\frac{4039}{5}+2020$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $2020-1:\frac{1}{2}+1=4039$.

Tổng $S=1+2020.4039:2=4081409,5$.

Ví dụ 5: Tính tổng $S=10,11+11,12+12,13+...+98,99+100$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=1,01$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $100-10,1:1,01+1=90$.

Tổng $S=10,11+100.90:2=4954,95$.

Dạng 2: Tổng có dạng $S=1+a+a^2+a^3+...+a^n$ (1)

Phương pháp

TH 1: Nếu $a=1$ thì $S=n+1$.

TH 2: Nếu $a\neq 1$ để tính tổng S ta làm như sau

Bước 1: Nhân hai vế của (1) với số a ta được

$aS=a+a^2+a^3+a^4+...+a^n$ (2)

Bước 2: Lấy (2) trừ (1) vế theo vế ta được

$aS-S=a^{n+1}-1\Rightarrow S=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Ví dụ 1: Tính tổng $S=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{20}$.

Lời giải

Ta có $2S=2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{21}$

Vậy $2S-S=S=2^{21}-2$.

Ví dụ 2: Tính tổng $S=1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}$.

Lời giải

Ta có $2S=2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{101}$

Vậy $2S-S=S=2^{101}-1$.

Ví dụ 3: Tính tổng $S=6+6^2+6^3+6^4+...+6^{99}$.

Lời giải

Ta có $6S = 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 ... + 6^{100}$.

Vậy $6S - S = 5S = 6^{100} - 6$.

Suy ra $S = \dfrac{6^{100} - 6}{5}$.

Dạng 3: Tính tổng có dạng $A = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + ... + a^{2n}$ (1)

Phương pháp:

Bước 1: Nhân hai vế của đẳng thức với a^2 ta được:

$a^2.A = a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + ... + a^{2n+2}$ (2)

Bước 2: Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được:

$$a^2.A - A = \left(a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + ... + a^{2n+2}\right) - \left(1 + a^2 + a^4 + a^6 + ... + a^{2n}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(a^2 - 1\right) = a^{2n+2} - 1 \Rightarrow A = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1}$$

Ví dụ 1: Tính tổng sau: $A = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ ..... + 2^{98} + 2^{100}$ (1)

Lời giải

Nhân vào hai vế với 2^2 ta được:

$2^2.A = 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \ ..... + 2^{100} + 2^{102}$ (2)

Lấy $(2)-(1)$ theo vế :

$$2^2.A - A = \left(2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \ ..... + 2^{100} + 2^{102}\right) - \left(1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ ..... + 2^{98} + 2^{100}\right)$$

$$3A = 2^{102} - 1 \Rightarrow A = \frac{2^{102} - 1}{3}$$

Ví dụ 2: Tính tổng sau: $B = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{81} + \dfrac{1}{729} + ... + \dfrac{1}{3^{2018}}$ (1)

Lời giải

Đặt $C = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{81} + \dfrac{1}{729} + ... + \dfrac{1}{3^{2018}} \Rightarrow B = \dfrac{1}{9} + C$

Ta có: $C = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^6} + ... + \dfrac{1}{3^{2018}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^2}.C = \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^8} + ... + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$\Rightarrow C - \frac{1}{3^2}.C = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^6} + ... + \frac{1}{3^{2018}}\right) - \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^8} + ... + \frac{1}{3^{2020}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}.C = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow C = \frac{9}{8}.\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^{2020}}\right) = \frac{3^{2018} - 1}{8.3^{2018}}$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị của x biết: $1+5^2+5^4+.....+5^{2x}=\dfrac{25^6-1}{24}$

Lời giải

Đặt $A=1+5^2+5^4+.....+5^{2x}$ (1)

Nhân vào hai vế với 5^2 ta được:

$5^2.A=5^2+5^4+5^6+5^8+\ .....+5^{2x+2}$ (2)

Lấy $(2)-(1)$ theo vế :

$5^2.A-A=\left(5^2+5^4+5^6+5^8+\ .....+2^{2x+2}\right)-\left(1+5^2+5^4+.....5^{2x}\right)$

$24.A=5^{2x+2}-1\Rightarrow A=\dfrac{5^{2x+2}-1}{24}$

Vì $1+5^2+5^4+.....5^{2x}=\dfrac{25^6-1}{24}=\dfrac{5^{12}-1}{24}\Rightarrow\dfrac{5^{2x+2}-1}{24}=\dfrac{5^{12}-1}{24}\Rightarrow x=5$. Vậy $x=5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Tìm giá trị của x biết: $1+(x-1)^2+(x-1)^4+.....+(x-1)^{2020}=\dfrac{17^{2022}-1}{\left[(x-1)^2-1\right]}$, với $x\neq 2$

Lời giải

Đặt $B=1+(x-1)^2+(x-1)^4+.....+(x-1)^{2020}$ (1).

Nhân cả hai vế của (1) cho $(x-1)^2$ ta được:

$B.(x-1)^2=(x-1)^2+(x-1)^4+(x-1)^6+.....+(x-1)^{2022}$ (2).

Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được:

$B.(x-1)^2-B=\left[(x-1)^2+(x-1)^4+(x-1)^6+.....+(x-1)^{2022}\right]-\left[1+(x-1)^2+(x-1)^4+.....(x-1)^{2020}\right]$

$B.\left[(x-1)^2-1\right]=(x-1)^{2022}-1\Rightarrow B=\dfrac{(x-1)^{2022}-1}{(x-1)^2-1}$

Theo bài cho: $B=\dfrac{17^{2022}-1}{\left[(x-1)^2-1\right]}\Rightarrow\dfrac{(x-1)^{2022}-1}{(x-1)^2-1}=\dfrac{17^{2022}-1}{\left[(x-1)^2-1\right]}\Rightarrow x-1=17\Rightarrow x=18$ (thỏa mãn) .

Vậy $x=18$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: $1+5^2+5^4+.....+5^{40}$ chia hết cho 26.

Lời giải

Phân tích: Ta nhóm 2 thừa số liền kề để làm xuất hiện thừa số 26.

Ta có:

$$1+5^2+5^4+.....+5^{40}=\left(1+5^2\right)+\left(5^4+5^6\right).....+\left(5^{38}+5^{40}\right)$$
$$=\left(1+5^2\right)+5^4.\left(1+5^2\right)+.....5^{38}.\left(1+5^2\right)$$
$$=26+5^4.26+.....5^{38}.26$$

Vậy $1+5^2+5^4+.....5^{40}$ chia hết cho 26.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng: $1+2^2+2^4+.....+2^{100}$ chia hết cho 21.

Lời giải

Phân tích: Ta nhóm 3 thừa số liền kề để làm xuất hiện thừa số 21.

Ta có:

$$1+2^2+2^4+.....+2^{100}=\left(1+2^2+2^4\right)+\left(2^6+2^8+2^{10}\right).....+\left(2^{96}+2^{98}+2^{100}\right)$$
$$=\left(1+2^2+2^4\right)+2^6.\left(1+2^2+2^4\right)+....+2^{96}.\left(1+2^2+2^4\right)$$
$$=21+2^6.21+.....+2^{96}.21$$

Do đó: $1+2^2+2^4+.....+2^{100}$ chia hết cho 21

Ví dụ 7: Chứng minh rằng: $1+3^2+3^4+.....+3^{100}$ chia hết cho 82.

Lời giải

Phân tích: Ta nhóm hai thừa số cách đều để làm xuất hiện thừa số 82.

Ta có:

$$1+3^2+3^4+.....+3^{100}=\left(1+3^4\right)+\left(3^2+3^6\right)+.....+\left(3^{90}+3^{94}\right)+\left(3^{96}+3^{100}\right)$$
$$=\left(1+3^4\right)+3^2.\left(1+3^4\right)+.....+3^{90}.\left(1+3^4\right)+3^{96}.\left(1+3^4\right)$$
$$=82+3^2.82+.....+3^{90}.82+3^{96}.82$$

Vậy $1+3^2+3^4+.....+3^{100}$ chia hết cho 82.

Ví dụ 8: So sánh: $1+5^2+5^4+.....+5^{40}$ với $\dfrac{5^{42}-2}{23}$.

Lời giải

Đặt $A=1+5^2+5^4+.....+5^{40}$

$\Rightarrow 5^2.A=5^2+5^4+5^6+.....+5^{42}$

$\Rightarrow 5^2.A-A=\left(5^2+5^4+5^6+.....+5^{42}\right)-\left(1+5^2+5^4+.....+5^{40}\right)$

$\Rightarrow 24.A=5^{42}-1\Rightarrow A=\dfrac{5^{42}-1}{24}<\dfrac{5^{42}-2}{24}<\dfrac{5^{42}-2}{23}$

Vậy $1+5^2+5^4+.....+5^{40}<\dfrac{5^{42}-2}{23}$.

Ví dụ 9: So sánh: $1+7^2+7^4+.....+7^{100}$ với $\dfrac{7^{102}-2019}{2021}$.

Lời giải

Đặt $A=1+7^2+7^4+.....+7^{100}$

$\Rightarrow 7^2.A=7^2+7^4+7^6+....+7^{102}$

$\Rightarrow 7^2.A-A=\left(7^2+7^4+7^6+....+7^{102}\right)-\left(1+7^2+7^4+.....+7^{100}\right)$

$\Rightarrow 48.A=7^{102}-1\Rightarrow A=\dfrac{7^{102}-1}{48}>\dfrac{7^{102}-2019}{48}>\dfrac{7^{102}-2019}{2021}$

Dạng 4: Tính tổng $S=a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}$, với $n\ge 1, n\in N; a\ne \pm 1$.

Phương pháp:

$S=a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}\quad (1)$

Bước 1: Nhân cả 2 vế của (1) với a^2 ta được :

$a^2S=a^3+a^5+...+a^{2n-1}+a^{2n+1}\quad (2)$

Bước 2: Lấy $(2)-(1)$ ta được :

$\left(a^2-1\right)S=a^{2n+1}-a\Leftrightarrow S=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$

Vậy $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$

Ví dụ 1: Tính tổng $S_1=2+2^3+2^5+...+2^{51}$.

Lời giải

Áp dụng công thức $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$ với $n=26; a=2$ ta được :

$S_1=2+2^3+2^5+...+2^{51}=\dfrac{2^{52}-2}{2^2-1}=\dfrac{2^{52}-2}{3}$.

Ví dụ 2: Tính tổng $S_2=\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^5+...+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{99}$.

Lời giải

Áp dụng công thức $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$ với $n=50; a=\dfrac{1}{3}$ ta được :

$S_2=\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^5+...+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{99}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{101}-\dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-1}=\dfrac{3^{100}-1}{8.3^{99}}$.

Ví dụ 3: $S_3=9+999+99999+...+\underbrace{999...9}_{15\text{ so }9}$.

Phân tích:

+) $9=10-1;999=10^3-1;99999=10^5-1;\ldots;\underbrace{999...9}_{15\text{ so }9}=10^{15}-1$.

+) Tổng trên có 8 số hạng.

Lời giải

Ta có: $S_3=9+999+99999+...+\underbrace{999...9}_{15\text{ so }9}=\left(10+10^3+10^5+...+10^{15}\right)-8$

Áp dụng công thức $a+a^3+a^5+...+a^{2n-1}=\dfrac{a^{2n+1}-a}{a^2-1}$ với $n=8;a=10$ ta được :

$10+10^3+10^5+...+10^{15}=\dfrac{10^{17}-10}{10^2-1}=\dfrac{10^{17}-10}{99}$

Vậy $S_3=\dfrac{10^{17}-10}{99}-8=\dfrac{10^{17}-802}{99}$.

Dạng 5: Tổng có dạng: $S=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)$.

Ví dụ 1: Tính tổng: $A=1.2+2.3+3.4+...+98.99$.

Phân tích:

Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 1.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của A với 3 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 3 này được viết dưới dạng $(3-0)$ ở số hạng thứ nhất, $(4-1)$ ở số hạng thứ hai, $(5-2)$ ở số hạng thứ ba, …, $(100-97)$ ở số hạng cuối cùng.

Lời giải:

Ta có:

$3A=1.2.3+2.3.3+3.4.3+...+98.99.3$

$3A=1.2.(3-0)+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+...+98.99.(100-97)$

$3A=1.2.(3-0)+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+...+98.99.(100-97)$

$3A=(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+97.98.99+98.99.100)-(0.1.2+1.2.3+2.3.4+...+97.98.99)$

$3A=98.99.100$.

Suy ra: $A=\dfrac{98.99.100}{3}=323400$.

Bình luận:

Ta thấy: $3A=98.99.100$ là tích của ba thừa số, trong đó 98.99 là hai thừa số của số hạng lớn nhất trong tổng, còn thừa số 100 bằng $99+1$ (bằng thừa số lớn nhất của A cộng với khoảng cách giữa hai thừa số của mỗi số hạng trong A).

Bài toán tổng quát:

$$S=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Ví dụ 2: Tính tổng: $B=1.3+3.5+5.7+...+99.101$.

Phân tích:

Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 2.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của B với 6 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 6 này được viết dưới dạng $(5+1)$ ở số hạng thứ nhất, $(7-1)$ ở số hạng thứ hai, $(9-3)$ ở số hạng thứ ba, …, $(103-97)$ ở số hạng cuối cùng.

Lời giải:

Ta có:

$6B=1.3.6+3.5.6+5.7.6+...+99.101.6$

$6B=1.3.(5+1)+3.5.(7-1)+5.7.(9-3)+...+99.101.(103-97)$

$=(1.3.1+1.3.5+3.5.7+5.7.9+...+97.99.101+99.101.103)-(1.3.5+3.5.7+...+97.99.101)$

$=3+99.101.103$

$=1029900$.

Suy ra: $B=\frac{1029900}{6}=171650$.

Bài toán tổng quát:

$$S=1.(1+k)+(1+k)(1+2k)+...+n(n+k)=\sum_{n=1}^{n}n(n+k),\ n,k\in\mathbb{N}^*.$$

(khoảng cách giữa các thừa số của mỗi số hạng là k)

* Nhân S với ba lần khoảng cách ta được: $3kS=\sum_{n=1}^{n}3kn(n+k)$.

* Phân tích từng số hạng của tổng mới để xuất hiện các số hạng đối nhau:

$$3kn(n+k)=n(n+k)(n+2k)-(n-k)n(n+k)$$

Từ đó tính được tổng S.

Dạng 6: Tổng có dạng: $1^2+2^2+3^2+....+n^2$

Bài toán tổng quát: Chứng minh rằng : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$

Lời giải

$S=1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2$

$S=1.1+2.2+3.3+4.4+...+n.n$

$=1(2-1)+2.(3-1)+3.(4-1)+...+n[(n+1)-1]$

$=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)-(1+2+3+4+5+...+n)$

Mà $1.2+2.3+3.4+4.5+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ **(Theo dạng bài trước)**

$\Rightarrow S=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}-\dfrac{n(n+1)}{2}=n(n+1)\left(\dfrac{n+1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=n(n+1)\dfrac{2n+4-3}{6}$

Vậy $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Do đó, ta có công thức tính dãy số:

$S=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$

Ví dụ 1: Tính các tổng sau:

$N=1+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+99^2$

$A=1+4+9+16+25+36+...+10000$

Lời giải

Tính N

Áp dụng bài toán tổng quát $S=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$

Ta thấy $n=99$ nên $N=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{99.(99+1)(2.99+1)}{6}=328350$

Tính A

Ta biến đổi A về dạng tương tự như biểu thức N ta có:

$A=1+4+9+16+25+36+...+10000=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+...+100^2$

$=\dfrac{100.(100+1)(2.100+1)}{6}=338350$ (với $n=100$)

Ví dụ 2. Tính tổng sau:

$B=-1^2+2^2-3^2+4^2-\ldots-19^2+20^2.$

Lời giải

Tính B

Ta biến đổi B về dạng quen thuộc như biểu thức N bằng cách thêm bớt tổng $2^2+4^2+...+100^2$.

$B=-1^2+2^2-3^2+4^2-\ldots-19^2+20^2$

$B=-(1^2+2^2+3^2+...+20^2)+2(2^2+4^2+6^2+...+20^2)$

$$B=-\frac{20.(20+1)(2.20+1)}{6}+2.2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)$$

$$B=-2870+8.\frac{10.(10+1)(2.10+1)}{6}$$

$$B=-2870+3080=210$$

Dạng 7 : Tính tổng có dạng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ với $k\in\mathbb{N}^*$.

PHƯƠNG PHÁP:

Cách 1: Ta sẽ tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ **dựa vào tổng dạng** $1.2+2.3+3.4+...+(n-1)n$.

Trước hết ta xét tổng $A=1.2+2.3+3.4+...+(2k-1).2k$

$$\Rightarrow 3A=1.2.3+2.3.3+3.4.3+...+(2k-1).2k.3$$

$$\Rightarrow 3A=1.2.(3-0)+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+...+(2k-1).2k.\left[(2k+1)-(2k-2)\right].$$

$$\Rightarrow 3A=1.2.3-0.1.2+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+...+(2k-1).2k.(2k+1)-(2k-2).(2k-1).2k$$

$$\Rightarrow 3A=(2k-1).2k.(2k+1)$$

$$\Rightarrow A=\frac{(2k-1).2k.(2k+1)}{3}.$$

Mặt khác $A=0.1+1.2+2.3+3.4+...+(2k-1).2k$.

$$\Rightarrow A=(0.1+1.2)+(2.3+3.4)+...+\left[(2k-2)(2k-1)+(2k-1).2k\right]$$

$$\Rightarrow A=1(0+2)+3.(2+4)+...+(2k-1).\left[(2k-2)+2k\right]$$

$$\Rightarrow A=1.2+3.6+...+(2k-1).(4k-2)$$

$$\Rightarrow A=1.1.2+3.3.2+...+(2k-1).(2k-1).2$$

$$\Rightarrow A=2.\left[1^2+3^2+...+(2k-1)^2\right]=2.S.$$

Vậy $S=\frac{A}{2}=\frac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

Cách 2: Ta sẽ tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ **dựa vào tổng dạng** $2.4+4.6+...+(2k-2).2k$ **và công thức** $n^2-1=(n-1).(n+1)$ **.**

Ta chứng minh công thức như sau: $n^2-1=n^2-n+n-1=n(n-1)+(n-1)=(n-1).(n+1)$ (đpcm).

Nhận thấy tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ có $(2k-1-1):2+1=k$ số hạng, từ đó ta có:

$S-k=(1^2-1)+(3^2-1)+(5^2-1)+...+\left[(2k-1)^2-1\right]$.

$\Rightarrow S-k=2.4+4.6+...+(2k-2).2k$.

$\Rightarrow 6.(S-k)=2.4.6+4.6.6+...+(2k-2).2k.6$

$\Rightarrow 6.(S-k)=2.4.(6-0)+4.6.(8-2)+...+(2k-2).2k.\left[(2k+2)-(2k-4)\right]$

$\Rightarrow 6.(S-k)=2.4.6-0.2.4+4.6.8-2.4.6+...+(2k-2).2k.(2k+2)-(2k-4).(2k-2).2k$

$\Rightarrow 6.(S-k)=(2k-2).2k.(2k+2)$

$\Rightarrow S-k=\dfrac{(2k-2).2k.(2k+2)}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{(2k-2).2k.(2k+2)}{6}+k=\dfrac{(2k-2).2k.(2k+2)}{6}+\dfrac{6k}{6}=\dfrac{2k\left[(2k-2)(2k+2)+3\right]}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{2k\left[2k(2k+2)-2(2k+2)+3\right]}{6}=\dfrac{2k\left[4k^2+4k-4k-4+3\right]}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{2k(4k^2-1)}{6}=\dfrac{2k(4k^2-2k+2k-1)}{6}=\dfrac{2k\left[(4k^2-2k)+(2k-1)\right]}{6}=\dfrac{2k\left[2k(2k-1)+(2k-1)\right]}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

Cách 3: Ta sẽ tính tổng $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ dựa vào tổng dạng $1.3+3.5+...+(2k-1).(2k+1)$ và tổng dạng $1+3+5+...+(2k-1)$.

Ta có $S=1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$

$\Rightarrow S=1.(3-2)+3.(5-2)+5.(7-2)+...+(2k-1).\left[(2k+1)-2\right]$

$\Rightarrow S=\left[1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)\right]-\left[1.2+3.2+5.2+...+(2k-1).2\right]$

$\Rightarrow S=\left[1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)\right]-2.\left[1+3+5+...+(2k-1)\right]$.

Đặt $S_1=1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)$ và $S_2=1+3+5+...+(2k-1)$.

Ta có: $S_1=1.3+3.5+5.7+...+(2k-1).(2k+1)$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + 3.5.6 + 5.7.6 + ... + (2k-1).(2k+1).6$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + 3.5.(7-1) + 5.7.(9-3) + ... + (2k-1).(2k+1).[(2k+3)-(2k-3)]$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + 3.5.7 - 1.3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + ... + (2k-1).(2k+1).(2k+3) - (2k-3).(2k-1).(2k+1)$

$\Rightarrow 6S_1 = 1.3.6 + (2k-1).(2k+1).(2k+3) - 1.3.5$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)+3}{6}$.

Ta có: $S_2 = 1+3+5+...+(2k-1)$.

Số số hạng của tổng S_2 là: $(2k-1-1):2+1=k$.

$\Rightarrow S_2 = 1+3+5+...+(2k-1) = (1+2k-1).k:2 = k^2$.

$\Rightarrow S = 1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2 = S_1 - 2S_2 = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)+3}{6} - 2k^2$.

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)+3-12k^2}{6} = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-(12k^2-3)}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3(4k^2-1)}{6} = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3[(4k^2-2k)+(2k-1)]}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3[2k(2k-1)+(2k-1)]}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k-1).(2k+1).(2k+3)-3(2k-1)(2k+1)}{6} = \dfrac{(2k-1)(2k+1)[(2k+3)-3]}{6}$.

Vậy $S = \dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

Cách 4: Ta sẽ tính tổng $S = 1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2$ dựa vào tổng dạng $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ và tổng dạng $1+2+3+...+n$.

Đặt $A_n = 1^2+2^2+3^2+...+n^2$.

$A_n = 1.(2-1)+2.(3-1)+3.(4-1)+...+n.(n+1-1)$.

$A_n = [1.2+2.3+3.4+...+n.(n+1)]-(1+2+3+...+n)$.

Đặt $B_n = 1.2+2.3+3.4+...+n.(n+1)$

$\Rightarrow 3.B_n = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + n.(n+1).3$

$\Rightarrow 3B_n = 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + n.(n+1).[(n+2)-(n-1)]$.

$\Rightarrow 3B_n = 1.2.3 - 0.1.2 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + ... + n.(n+1).(n+2) - (n-1).n.(n+1)$

$\Rightarrow 3B_n = n.(n+1).(n+2)$

$\Rightarrow B_n = \dfrac{n.(n+1).(n+2)}{3}$.

Đặt $C_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

Ta có C_n là tổng của n số nguyên dương đầu tiên nên $C_n = \dfrac{n.(n+1)}{2}$.

Suy ra

$$A_n = B_n - C_n = \frac{n.(n+1).(n+2)}{3} - \frac{n.(n+1)}{2} = \frac{n.(n+1).(2n+4) - 3n.(n+1)}{6} = \frac{n.(n+1).(2n+4-3)}{6}$$

Vậy $A_n = \dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$.

Xét $A_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2$

$\Rightarrow 4A_k = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2k)^2$

$\Rightarrow S + 4A_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + (2k-1)^2 + (2k)^2 = A_{2k}$

$\Rightarrow S = A_{2k} - 4A_k = \dfrac{2k.(2k+1).(4k+1)}{6} - 4.\dfrac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k+1).[2k.(4k+1) - 4.k(k+1)]}{6} = \dfrac{(2k+1).[8k^2 + 2k - 4k^2 - 4k]}{6}$

$\Rightarrow S = \dfrac{(2k+1).(4k^2 - 2k)}{6} = \dfrac{(2k+1).2k.(2k-1)}{6}$

Vậy $S = \dfrac{(2k-1).2k.(2k+1)}{6}$.

Ví dụ 1. Tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 49^2$.

Phân tích: Đây là bài toán cụ thể của dạng này với $k = 25$.

Lời giải

$S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 49^2$.

Ta chứng minh công thức sau: $n^2-1=n^2-n+n-1=n(n-1)+(n-1)=(n-1)(n+1)$.

Ta có:

$S-25=(1^2-1)+(3^2-1)+(5^2-1)+...+(49^2-1)$.

$\Rightarrow S-25=2.4+4.6+...+48.50$.

$\Rightarrow 6.(S-25)=2.4.6+4.6.6+...+48.50.6$

$\Rightarrow 6.(S-25)=2.4.(6-0)+4.6.(8-2)+...+48.50.(52-46)$

$\Rightarrow 6.(S-25)=2.4.6-0.2.4+4.6.8-2.4.6+...+48.50.52-46.48.50$

$\Rightarrow 6.(S-25)=48.50.52$

$\Rightarrow S-25=\dfrac{48.50.52}{6}$

$\Rightarrow S=\dfrac{48.50.52}{6}+25=20825$

Ví dụ 2: Tính tổng $1^2+3^2+5^2+.....+99^2$

Lời giải

Áp dụng công thức ở trên với $k=50$ ta được: $1^2+3^2+5^2+.....+99^2=\dfrac{50.99.101}{3}=166650$

Ví dụ 3: Tính tổng $S=51^2+53^2+55^2+.....+99^2$

Lời giải

Ta tính 2 tổng $A=1^2+3^2+5^2+...+99^2$ và $B=1^2+3^2+5^2+...+49^2$

Theo công thức thu được

$A=1^2+3^2+5^2+.....+99^2=\dfrac{50.99.101}{3}=166650$

và $B=1^2+3^2+5^2+.....+49^2=\dfrac{25.49.51}{3}=20825$

Ta có $S=A-B=166650-20825=145825$

Dạng 8: Tổng có dạng: $S=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2$ **(k lẻ và** $k\in\mathbb{N}$**)**

Bài toán tổng quát: Chứng minh rằng : $S=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\dfrac{(k-1).k.(k+1)}{6}$

Ta có: $A=1.2+2.3+3.4+4.5+...+(k-2)(k-1)+(k-1).k$

$3A=1.2.3+2.3.3+3.4.3+4.5.3+....+(k-2)(k-1).3+(k-1).k.3$

$3A = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + (k-1).k.[(k+1)-(k-2)]$

$3A = (k-1).k.(k+1)$

Suy ra: $A = \frac{(k-1).k.(k+1)}{3}$

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (k-2)(k-1) + (k-1).k$

$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + ... + (k-1).[(k-2)+k]$

$= 2.4 + 4.8 + 6.12 + ... + (k-1).(2k-2)$

$= 2.2.2 + 4.4.2 + 6.6.2 + ... + (k-1).2(k-1).2$

$= 2\left[2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2\right]$

=2.S

Suy ra: $S = \frac{A}{2}$ mà $A = \frac{(k-1)k.(k+1)}{3}$

Vậy $S = \frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$

Áp dụng tính: $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

Xét: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$

Suy ra: $\frac{S}{2^2} = \frac{S}{4} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

Nên: $P = \frac{S}{4} = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$.

Ví dụ 1: Tính tổng $B = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2$

Phân tích: Tổng B có dạng $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2 = \frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k = 101$

Lời giải

Áp dụng công thức: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (k-1)^2 = \frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k = 101$.

Ta được: $B = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 100^2 = \frac{100.101.102}{6} = 171700$.

Ví dụ 2: Tính tổng $C = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$.

Phân tích: Tổng C có dạng $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=100$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=100$.

Ta được: $C=1^2+2^2+3^2+...+100^2=\frac{100.101.201}{6}=338350$.

Dạng 9: Tổng có dạng $S=a_1.a_2+a_2.a_3+a_3.a_4+a_4.a_5+\ ....+a_{n-1}.a_n$

Phương pháp giải: Đặt $k=a_2-a_1=a_3-a_2=\ ....=a_n-a_{n-1}$

Nhân cả hai vế với $3k$, rồi tách $3k$ ở mỗi số hạng để tạo thành các số hạng mới tự triệt tiêu.

Ví dụ 1: Tính tổng $S=1.3+3.5+5.7+\ .....+99.101$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải

Ta có:

$6S=1.3.6+3.5.6+5.7.3+\ .....+99.101.6$

$=1.3.(5+1)+3.5.(7-1)+5.7.(9-3)+...+99.101.(103-97)$

$=1.3.1+1.3.5+3.5.7-1.3.5+5.7.9-3.5.7\ ...+99.101.103+97.99.101$

$=3+99.101.103$

$\Rightarrow S=\frac{3+99.101.103}{6}=171650$

Vậy $S=171650$.

Ví dụ 2: Tính tổng $S=1.4+4.7+7.10+\ .....+2017.2020$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 3. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 9) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải

Ta có:

$9S=1.4.9+4.7.9+7.10.9+\ .....+2017.2020.9$

$=1.4.(7+2)+4.7.(10-1)+7.10.(13-4)+...+2017.2020.(2023-2014)$

$=1.4.7+1.4.2+4.7.10-1.4.7+7.10.13-4.7.10.\ ...+2017.2020.2023-2014.2017.2020$

$=8+2017.2020.2023$

$\Rightarrow S = \dfrac{8 + 2017.2020.2023}{9} = 915821092$

Vậy $S = 915821092.$

Dạng 10: Tổng có dạng $S = 1.a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n$

Trong đó $a_2 - 1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = k \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)k$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Nhân hai vế với $4k$, rồi tách $4k$ ở mỗi số hạng trong tổng để số hạng trước và số hạng sau tạo thành những số tự triệt tiêu nhau.

$S = 1.a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$4kS = 1.a_2a_3.4k + a_2a_3a_4(a_5 - 1) + a_3a_4a_5(a_6 - a_2) + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n(a_{n+1} - a_{n-3})$

$4kS = 4k.a_2a_3 + a_2a_3a_4a_5 - a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5a_6 - a_2a_3a_4a_5 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1} - a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$

$4kS = a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1} + 4k.a_2a_3 - a_2a_3a_4$

$S = \dfrac{a_{n-2}a_{n-1}a_na_{n+1} + 4k.a_2a_3 - a_2a_3a_4}{4k}$ (*).

Ví dụ: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 98.99.100$

Phân tích

Vì khoảng cách giữa các số trong một số hạng là 1 nên ta nhân 4 vào hai vế để tính S.

Lời giải

$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 98.99.100$

$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + ... + 98.99.100.(101-97)$

$4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + ... + 98.99.100.101 - 97.98.99.100$

$4S = 98.99.100.101$

$4S = 97990200$

$S = 24497550$

Ví dụ 2: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + 17.18.19$.

Lời giải

Ta có: $4S = 1.2.3\ \ 4 - 0\ \ + 2.3.4\ \ 5 - 1\ \ + 3.4.5\ \ 6 - 2\ \ + ... + 17.18.19\ \ 20 - 16$

$= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + ... + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$

$= 17.18.19.20 = 116280$.

Do vậy $S = \dfrac{116280}{4} = 29070$.

Ví dụ 3: Tính tổng $S = 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ... + 95.97.99$.

Lời giải

Ta có:

$$8S = 1.3.5\ \ 7+1\ \ + 3.5.7\ \ 9-1\ \ + 5.7.9\ \ 11-3\ \ + ... + 95.97.99\ \ 101-93$$

$$= 1.3.5.7 + 1.3.5 + 3.5.7.9 - 1.3.5.7 + 5.7.9.11 - 3.5.7.9 + ... + 95.97.99.101 - 93.95.97.99$$

$$= 1.3.5 + 95.97.99.101 = 92140800\ .$$

Do vậy $S = \dfrac{92140800}{8} = 11517600$.

Ví dụ 4: Tính tổng $S = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + ... + 19.20.21.22$.

Lời giải

Ta có:

$$5S = 1.2.3.4\ \ 5-0\ \ + 2.3.4.5\ \ 6-1\ \ + 3.4.5.6\ \ 7-2\ \ + ... + 19.20.21.22\ \ 23-18$$

$$= 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 - 1.2.3.4.5 + 3.4.5.6.7 - 2.3.4.5.6 + ... + 19.20.21.22.23 - 18.19.20.21.22$$
$$= 19.20.21.22.23 = 4037880$$

Do vậy $S = \dfrac{4037880}{5} = 807576$.

Ví dụ 5: Tính tổng $S = \dfrac{1}{1.2.3.4} + \dfrac{1}{2.3.4.5} + \dfrac{1}{3.4.5.6} + ... + \dfrac{1}{7.8.9.10}$.

Lời giải

Ta có: $S = \dfrac{1}{1.2.3.4} + \dfrac{1}{2.3.4.5} + \dfrac{1}{3.4.5.6} + ... + \dfrac{1}{7.8.9.10}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{7.8.9} - \frac{1}{8.9.10}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{8.9.10}\right) = \frac{119}{2160}.$$

Dạng 11: Tổng có dạng $A = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3\ (n \in \mathbb{N}^*)$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Phân tích công thức của từng số hạng trong tổng thành $(n-1)n(n+1)$ để thành tổng quen thuộc:

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + (n-1)n(n+1)$$

Cụ thể:

$$n^3 = (n^3 - n) + n = n(n^2 - 1) + n = n[n^2 - n + n - 1] + n = n[n(n-1) + n - 1] + n = (n-1)n(n+1) + n$$

Do đó $A = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = 1 + (1.2.3 + 2) + (2.3.4 + 3) + (3.4.5 + 4) + ... + (n-1)n(n+1) + n$

$=(1+2+3+...+n)+[1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+(n-1)n(n+1)]$

Đặt $B=1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+(n-1)n(n+1)$

Khi đó $4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)..+(n-1)n(n+1).[(n+2)-(n-2)]$

$4C=[1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+(n-1)n(n+1)(n+2)]$
$-[1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+(n-2).(n-1)n(n+1)]=(n-1)n(n+1)(n+2)$

$C=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

$A=B+C=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Tổng quát: $A=1+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Ví dụ 1: Tính tổng $A=1+2^3+3^3+...+10^3$

Phân tích

Ta áp dụng dạng toán trên với $n=10$

Lời giải

$n^3=(n^3-n)+n=n(n^2-1)+n=n[n^2-n+n-1]+n=n[n(n-1)+n-1]+n=(n-1)n(n+1)+n$

Do đó $A=1+2^3+3^3+...+10^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+4)+...+(9.10.11+10)$

$=(1+2+3+...+10)+(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+9.10.11)$

Đặt $B=1+2+3+...+10=\dfrac{10.11}{2}=5.11=55$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+9.10.11$

Khi đó, $4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+9.10.11.(12-8)$

$4C=(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+9.10.11.12)-(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+8.9.10.11)$
$=9.10.11.12$

$C=\dfrac{9.10.11.12}{4}=2970$

$A=B+C=55+2970=3025$.

Ví dụ 2: Tính tổng $A=1+2^3+3^3+...+100^3$

Phân tích

Ta áp dụng dạng toán trên với $n=100$

Lời giải

$$n^3=\left(n^3-n\right)+n=n\left(n^2-1\right)+n=n\left[n^2-n+n-1\right]+n=n\left[n(n-1)+n-1\right]+n=(n-1)n(n+1)+n$$

Do đó $A=1+2^3+3^3+...+100^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+4)+...+(99.100.101+100)$

$=(1+2+3+...+100)+(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+99.100.101)$

Đặt $B=1+2+3+...+100=\dfrac{100.101}{2}=50.101=5050$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+99.100.101$

$C=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+99.100.101$

$4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+99.100.101.(102-98)$

$4C=(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+99.100.101.102)$

$-(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+98.99.100.101)=99.100.101.102$

$C=\dfrac{99.100.101.102}{4}=99.25.101.102=25497450$

$A=B+C=5050+25497450=25502500$.

Ví dụ 3: Tính tổng $A=2^3+4^3+6^3+...+200^3$

Phân tích

Phân tích $2^3=2^3.1^3$; $4^3=2^3.2^3$; $6^3=2^3.3^3$;...; $200^3=2^3.100^3$.

Khi đó $A=2^3.\left(1+2^3+3^3+...+100^3\right)$

Lời giải

Ta có $A=2^3+4^3+6^3+...+200^3=2^3.1^3+2^3.2^3+2^3.3^3+...+2^3.100^3=2^3.\left(1+2^3+3^3+...+100^3\right)$

Theo kết quả ví dụ 2 thì $A=2^3.25497450=203979600$.

Ví dụ 4: Tìm số nguyên x, biết: $(2x-2)^2=1^3+2^3+3^3+...+6^3$

Phân tích

Tính giá trị vế phải rồi thay vào tìm x.

Lời giải

Đặt $A=1^3+2^3+3^3+...+6^3$

$$n^3=\left(n^3-n\right)+n=n\left(n^2-1\right)+n=n\left[n^2-n+n-1\right]+n=n\left[n(n-1)+n-1\right]+n=(n-1)n(n+1)+n$$

Do đó $A=1+2^3+3^3+...+11^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+3)+...+(10.11.12+11)$

$A=1+2^3+3^3+...+11^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+4)+(4.5.6+5)+(5.6.7+6)$

$=(1+2+3+...+11)+(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+10.11.12)$

$B=1+2+3+...+11=\dfrac{11.12}{2}=66$

$C=1.2.3+2.3.4+4.5.6+...+10.11.12$

$C=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+10.11.12$

$4C=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+10.11.12.(13-9)$

$4C=(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+10.11.12.13)-(1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+....+9.10.11.12)$
$=10.11.12.13$

$C=\dfrac{10.11.12.13}{4}=4290$

$A=B+C=66+4290=4356$

Phân tích A ra thừa số nguyên tố ta có: $A=2^2.3^2.11^2$ nên $A=66^2$

Theo bài toán ta có

$(2x-2)^2=66^2\Rightarrow 2x-2=66$ hoặc $2x-2=-66$

$\Rightarrow x=34$ hoặc $x=-32$

Vậy $x=34;\ x=-32$

Ví dụ 5: Không tính ra kết quả hãy so sánh $A=1^3+2^3+3^3+...+99^3$ và $B=1.2.3+2.3.4+...+98.99.100$

Phân tích

Biến đổi biểu thức A theo biểu thức B dựa vào cách làm trong hướng dẫn của các ví dụ 1,2,3.

Lời giải

$n^3=(n^3-n)+n=n(n^2-1)+n=n[n^2-n+n-1]+n=n[n(n-1)+n-1]+n=(n-1)n(n+1)+n$

Do đó $A=1+2^3+3^3+...+99^3=1+(1.2.3+2)+(2.3.4+3)+(3.4.5+3)+...+(98.99.100+99)$

$=(1+2+3+...+99)+(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+98.99.100)>(1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+98.99.100)$

$\Rightarrow A>B$

A. Dạng 13: Liên phân số

Ví dụ 1: Viết kết quả các biểu thức sau dưới dạng phân số $A=\dfrac{20}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}$.

Lời giải

Ta có $A=\dfrac{20}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}=\dfrac{20}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\dfrac{21}{5}}}}=\dfrac{20}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{5}{21}}}=\dfrac{20}{2+\dfrac{1}{\dfrac{68}{21}}}=\dfrac{20}{2+\dfrac{21}{68}}=\dfrac{20}{\dfrac{157}{68}}=\dfrac{1360}{157}$.

Ví dụ 2: Tính nhanh $10101.\left(\dfrac{5}{111111}+\dfrac{5}{222222}-\dfrac{4}{3.7.11.13.37}\right)$.

Lời giải

Ta có $10101.\left(\dfrac{5}{111111}+\dfrac{5}{222222}-\dfrac{4}{3.7.11.13.37}\right)$

$=10101.\left(\dfrac{5}{11\times10101}+\dfrac{5}{22\times10101}-\dfrac{4}{11\times10101}\right)=\dfrac{5}{11}+\dfrac{5}{22}-\dfrac{4}{11}=\dfrac{1}{11}+\dfrac{5}{22}=\dfrac{7}{22}$.

Ví dụ 3: Tìm $a,b\in\mathbb{N}^*$, biết $\dfrac{329}{1051}=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}}$.

Lời giải

Ta có

$\dfrac{329}{1051}=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\dfrac{1051}{329}}=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}}\Leftrightarrow\dfrac{1051}{329}=3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}\Leftrightarrow3+\dfrac{64}{329}=3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{\dfrac{329}{64}}=\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}}\Leftrightarrow\dfrac{329}{64}=5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}\Leftrightarrow5+\dfrac{9}{64}=5+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}\Leftrightarrow\dfrac{9}{64}=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\dfrac{64}{9}}=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{64}{9}=a+\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow7+\dfrac{1}{9}=a+\dfrac{1}{b}$.

Vậy $a=7;b=9$.

Ví dụ 4: Tìm x biết $7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}}}}=\frac{85}{11}$.

Lời giải

Ta có $7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}}}}=\frac{85}{11}\Leftrightarrow\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}}}}=\frac{8}{11}$

$\Leftrightarrow 7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}}}=\frac{11}{4}\Leftrightarrow\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}}}=\frac{-17}{4}\Leftrightarrow 7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}}=\frac{-8}{17}$

$\Leftrightarrow\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}}=\frac{-127}{17}\Leftrightarrow 7+\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}=\frac{-34}{127}$

$\Leftrightarrow\cfrac{2}{7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}}=\frac{-923}{127}\Leftrightarrow 7+\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}=\frac{-254}{923}\Leftrightarrow\cfrac{2}{\cfrac{1}{x-3}}=\frac{-6715}{923}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x-3}=\frac{-1846}{6715}\Leftrightarrow x-3=\frac{-6715}{1846}\Leftrightarrow x=\frac{-1177}{1846}$.

Ví dụ 5: Rút gọn $\dfrac{100-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{100-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}}=\dfrac{(1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+...+\left(1-\frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}}$.

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{99}{100}}=1$$

III. BÀI TẬP

Dạng 1: Tổng các số hạng cách đều

Bài 1: Tính tổng $S=1+2+3+4+...+2000$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=1$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $2000-1:1+1=2000$.

Tổng $S=1+2000.2000:2=2001000$.

Bài 2: Tính tổng $S=2+4+6+...+2020+2022$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=2$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $2022-2:2+1=1011$.

Tổng $S=2+2022.1011:2=1023132$.

Bài 3: Tính tổng $S=4+14+24+...+1004+1014$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=10$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $1014-4:10+1=102$.

Tổng $S=4+1014.102:2=51918$.

Bài 4: Tính tổng $S=1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}+2+...+\frac{101}{3}+34$.

Phân tích: Các số hạng cách đều nhau với $d=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Số số hạng của dãy là $34-1:\frac{1}{3}+1=100$.

Tổng $S=1+34.100:2=1750$.

Dạng 2: Tổng có dạng $S=1+a+a^2+a^3+...+a^n$

Bài 1. Tính tổng $S=1+4+4^2+4^3+...+4^{1000}$.

Lời giải

Ta có $4S = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + ... + 4^{1001}$.

Vậy $4S - S = 3S = 4^{1001} - 1$.

Suy ra $S = \dfrac{4^{1001} - 1}{3}$.

Bài 2. Tính tổng $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} ... + \dfrac{1}{2^{99}} + \dfrac{1}{2^{100}}$.

Lời giải

Ta có $2S = 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{98}} + \dfrac{1}{2^{99}}$.

Vậy $2S - S = S = 2 - \dfrac{1}{2^{100}}$.

Bài 3. Tính tổng $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4} ... + \dfrac{1}{3^{99}} + \dfrac{1}{3^{100}}$.

Lời giải

Ta có $3S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{3^{98}} + \dfrac{1}{3^{99}}$.

Vậy $3S - S = 2S = 1 - \dfrac{1}{3^{100}}$.

Suy ra $S = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{100}}\right)$.

Bài 4. Chứng minh $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} ... + \dfrac{1}{2^n} < 1$.

Lời giải

Ta có $2S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Vậy $2S - S = S = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n} < 1$.

Bài 5. Chứng minh $S = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}$ chia hết cho 40.

Phân tích:

+) Ta thấy $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 40$

+) Tổng trên có $\dfrac{100 - 1}{1} + 1 = 100$ số hạng.

Lời giải

Ta có $S=\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+...+\left(3^{97}+3^{98}+3^{99}+3^{101}\right)$.

$S=3\left(1+3+3^2+3^3\right)+...+3^{97}\left(1+3+3^2+3^3\right)=\left(1+3+3^2+3^3\right)\left(3+...+3^{97}\right)$

Suy ra S chia hết cho 40 vì $1+3+3^2+3^3=40$.

Dạng 3: Tính tổng có dạng $A=1+a^2+a^4+a^6+.....+a^{2n}$

Bài 1: Tính tổng sau: $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{100}}$

Lời giải

Ta có: $B=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{100}}$

Đặt $C=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{100}}$

Ta có:

$\frac{1}{2^2}.C=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+...+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{102}}$

$C-\frac{1}{2^2}.C=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+...+\frac{1}{2^{98}}+\frac{1}{2^{100}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+...+\frac{1}{2^{100}}+\frac{1}{2^{102}}\right)$

$\frac{3}{4}.C=1-\frac{1}{2^{102}}=\frac{2^{102}-1}{2^{102}}\Rightarrow C=\frac{2^{102}-1}{2^{102}}:\frac{3}{4}=\frac{2^{102}-1}{3.2^{100}}$

Do đó: $B=\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}+\frac{2^{102}-1}{3.2^{100}}=\frac{3.2^{99}}{3.2^{100}}+\frac{2^{102}-1}{3.2^{100}}=\frac{3.2^{99}+2^{102}-1}{3.2^{100}}=\frac{7.2^{99}-1}{3.2^{99}}$

Bài 2. Chứng minh rằng: $7^4+7^6+.....7^{2n+2}=\frac{7^{2n+4}-7^4}{48}$

Lời giải

Đặt $A=7^4+7^6+.....7^{2n+2}$ (1). Nhân cả hai vế của (1) với 7^2 ta được:

$7^2.A=7^6+7^8+.....7^{2n+4}$ (2).

Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được:

$7^2.A-A=\left(7^6+7^8+.....7^{2n+4}\right)-\left(7^4+7^6+.....7^{2n+2}\right)$

$48.A=7^{2n+4}-7^4\Rightarrow A=\frac{7^{2n+4}-7^4}{48}$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\left(x^2+x^4+x^6+.....x^{100}\right).\frac{x^2-1}{x^{100}-1}=x^2$

Lời giải

Đặt $A=x^2+x^4+x^6+.....x^{100}$

$\Rightarrow x^2.A = x^4 + x^6 + x^8 + ...x^{102}$

$\Rightarrow x^2.A - A = \left(x^4 + x^6 + x^8 + ...x^{102}\right) - \left(x^2 + x^4 + x^6 + ...x^{100}\right)$

$A.\left(x^2 - 1\right) = x^{102} - x^2 \Rightarrow A = \dfrac{x^{102} - x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2\left(x^{100} - 1\right)}{x^2 - 1}$

Do đó $\left(x^2 + x^4 + x^6 + ...x^{100}\right).\dfrac{x^2 - 1}{x^{100} - 1} = \dfrac{x^2\left(x^{100} - 1\right)}{x^2 - 1}.\dfrac{x^2 - 1}{x^{100} - 1} = x^2$ (đpcm)

Bài 4. So sánh: $1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90}$ với $\dfrac{63^{40} - 1}{63}$.

Lời giải

Đặt $D = 1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90}$

$\Rightarrow 8^2.D = 8^2 + 8^4 + ...8^{92}$

$\Rightarrow 8^2.D - D = \left(8^2 + 8^4 + ...8^{92}\right) - \left(1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90}\right)$

$\Rightarrow 63.D = 8^{92} - 1 \Rightarrow D = \dfrac{8^{92} - 1}{63} = \dfrac{64^{46} - 1}{63} > \dfrac{63^{40} - 1}{63}$

Vậy $1 + 8^2 + 8^4 + ... + 8^{90} > \dfrac{63^{40} - 1}{63}$.

Bài 5. Chứng minh rằng: $1 + 6^2 + 6^4 + ... + 6^{200}$ chia hết cho 37.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 1 + 6^2 + 6^4 + ... + 6^{200} &= \left(1 + 6^2\right) + \left(6^4 + 6^6\right) + ... + \left(6^{198} + 6^{200}\right) \\ &= \left(1 + 6^2\right) + 6^4.\left(1 + 6^2\right) + ... + 6^{198}.\left(1 + 6^2\right) \\ &= 37 + 6^4.37 + ... + 6^{198}.37 \end{aligned}$$

Vậy $1 + 6^2 + 6^4 + ... + 6^{200}$ chia hết cho 37

Dạng 4: Tính tổng $S = a + a^3 + a^5 + ... + a^{2n-1}$, với $n \geq 1, n \in N; a \neq \pm 1$.

Bài 1. Cho $A = 5 + 5^3 + 5^5 + ... + 5^{27}$

a) Tính giá trị của A

b) Chứng minh A chia hết cho 26.

Lời giải

a) Áp dụng công thức $a + a^3 + a^5 + ... + a^{2n-1} = \dfrac{a^{2n+1} - a}{a^2 - 1}$ với $n = 14; a = 5$ ta được :

$A = 5 + 5^3 + 5^5 + ... + 5^{27} = \dfrac{5^{29} - 5}{5^2 - 1} = \dfrac{5^{29} - 5}{24}$

b)

$A = 5 + 5^3 + 5^5 + ... + 5^{27} = \left(5 + 5^3\right) + \left(5^5 + 5^7\right) + ... + \left(5^{25} + 5^{27}\right) = 5\left(1 + 5^2\right) + 5^5\left(1 + 5^2\right) + ... + 5^{25}\left(1 + 5^2\right)$

$A=\left(1+5^2\right)\left(5+5^5+5^9+...+5^{25}\right)=26\left(5+5^5+5^9+...+5^{25}\right)$

Vậy A chia hết cho 26.

Bài 2. Cho biểu thức $B=\dfrac{2+2^3+2^5+...+2^{2x-1}}{3+3^3+3^5+...+3^{2x-1}}$. Chứng minh $B=\dfrac{16\left(2^{2x}-1\right)}{9\left(3^{2x}-1\right)}$, $x\ge 1, x\in N$.

Lời giải

Ta có $B=\dfrac{2+2^3+2^5+...+2^{2x-1}}{3+3^3+3^5+...+3^{2x-1}}=\dfrac{2^{2x+1}-2}{2^2-1}.\dfrac{3^2-1}{3^{2x+1}-3}=\dfrac{2^{2x+1}-2}{3}.\dfrac{8}{3^{2x+1}-3}=\dfrac{16\left(2^{2x}-1\right)}{9\left(3^{2x}-1\right)}$.

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức $C=1+111+11111+...+\underbrace{111...1}_{27\text{ so }1}$

Lời giải

Ta có $9C=9+999+999+...+\underbrace{999...9}_{27\text{ so }9}=\left(10-1\right)+\left(10^3-1\right)+...+\left(10^{27}-1\right)=\left(10+10^3+...+10^{27}\right)-14$

$9C=\dfrac{10^{29}-10}{10^2-1}-14=\dfrac{10^{29}-1396}{99}\Rightarrow C=\dfrac{10^{29}-1396}{891}$

Bài 4. Cho $D=8+8^3+8^5+...+8^{2x+1}$, $x\ge 1, x\in N$. Tìm x để $63D+8=2^{51}$.

Lời giải

Ta có: $D=8+8^3+8^5+...+8^{2x+1}=\dfrac{8^{2x+3}-8}{8^2-1}=\dfrac{8^{2x+3}-8}{63}$.

Do đó $63D+8=2^{51}\Leftrightarrow 8^{2x+3}-8=8^{17}-8\Leftrightarrow 8^{2x+3}=8^{17}\Leftrightarrow 2x+3=17\Leftrightarrow x=7$.

Bài 5. Cho $E=7+7^3+7^5+...+7^{101}$. Chứng minh $7^{103}-7$ chia hết cho 48 và E chia hết cho 19.

Lời giải

+ Ta có $E=\dfrac{7^{103}-7}{7^2-1}=\dfrac{7^{103}-7}{48}\Rightarrow E.48=7^{103}-7$

Vậy $7^{103}-7$ chia hết cho 48

+ Ta có $E=7+7^3+7^5+...+7^{101}=7\left(1+7^2+7^4\right)+7^7\left(1+7^2+7^4\right)+...+7^{97}\left(1+7^2+7^4\right)$

$E=\left(1+7^2+7^4\right)\left(7+7^7+7^{13}+...+7^{97}\right)=2451\left(7+7^7+7^{13}+...+7^{97}\right)=3.19.43\left(7+7^7+7^{13}+...+7^{97}\right)$

Vậy A chia hết cho 19.

Dạng 5: Tổng có dạng: $S=1.2+2.3+3.4+...+n\left(n+1\right)$.

Bài 1. Tính tổng: $D=1.4+4.7+7.10+...+37.40+40.43$

Phân tích:

Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 3.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của D với 9 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số). Thừa số 9 này được viết dưới dạng $(7+2)$ ở số hạng thứ nhất, $(10-1)$ ở số hạng thứ hai, $(13-4)$ ở số hạng thứ ba, …, $(46-37)$ ở số hạng cuối cùng.

Lời giải:

Ta có:

$9D=1.4.(7+2)+4.7.(10-1)+7.10.(13-4)+...+37.40.(43-34)+40.43.(46-37)$

$=(1.4.2+1.4.7+4.7.10+7.10.13+...+37.40.43+40.43.46)-(1.4.7+4.7.10+...+37.40.43)$

$9D=8+40.43.46=79128$.

Suy ra: $D=\dfrac{79128}{9}=8792$.

Bài tập tương tự:

Tính tổng: $T=1.5+5.9+9.13+...+201.205$.

Hướng dẫn: Nhân T với 12.

Đáp số: $T=717655$.

Bài 2. Tính tổng: $E=2.4+4.6+6.8+...+98.100$

Phân tích:

Khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng là 2.

Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của E với 6 (ba lần khoảng cách giữa hai thừa số).

Lời giải:

Ta có:

$6E=2.4.(6-0)+4.6.(8-2)+6.8.(10-4)+...+98.100.(102-96)$

$=(2.4.6+4.6.8+6.8.10+...+98.100.102)-(0.2.4+2.4.6+4.6.8+...+96.98.100)$

$=98.100.102$.

Suy ra: $E=\dfrac{98.100.102}{6}=166600$.

Bài 3. Tính tổng: $F=1.99+2.98+3.97+...+98.2+99.1$

Lời giải:

Ta có:

$F=1.99+2.(99-1)+3.(99-2)+...+98.(99-97)+99.(99-98)$

$=(1.99+2.99+3.99+...+98.99+99.99)-(1.2+2.3+...+97.98+98.99)$

$=99(1+2+3+...+99)-\dfrac{98.99.100}{3}$

$$=99.\frac{99.100}{2}-\frac{98.99.100}{3}$$

$$=99.100.\left(\frac{99}{2}-\frac{98}{3}\right)$$

$$=\frac{99.100.101}{6}.$$

Bình luận:

Trong bài tập 3, thừa số trong số hạng đứng trước không được lặp lại trong số hàng đứng sau, nên ta không nhân F với ba lần khoảng cách giữa hai thừa số nữa mà tách một thừa số trong tích làm xuất hiện các tổng mà ta đã biết cách tính hoặc dễ dàng tính được.

Bài toán tổng quát:

$$1.n+2(n-1)+3(n-2)+...+(n-1).2+n.1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Bài 4. Tính tổng: $G=1.2+3..4+5.6+...+99.100$.

Lời giải:

- ***Cách 1***:

Ta có:

$$G=1.2+(2+1).4+(4+1).6+...+(98+1).100$$

$$=(2.4+4.6+...+98.100)+(2+4+6+...+100)$$

$$=\frac{98.100.102}{6}+\frac{102.50}{2}$$

$$=169150.$$

- ***Cách 2***:

Ta có:

$$G=1.(3-1)+3.(5-1)+5.(7-1)+...+99.(101-1)$$

$$=(1.3+3.5+5.7+...+99.101)-(1+3+5+7+...+99)$$

$$=\frac{3+99.101.103}{6}-\frac{100.50}{2}$$

$$=169150.$$

Bài tập tương tự:

Tính tổng: $G_1=1.4+2.5+3.6+...+99.102$;

Hướng dẫn:

$$G_1=1.(2+2)+2.(3+2)+3.(4+2)+...+99.(100+2)$$

$$=(1.2+2.3+3.4+...+99.100)+2.(1+2+3+4+...+99)$$

$$=343200.$$

Dạng 6: Tổng có dạng: $1^2+2^2+3^2+....+n^2$

Bài 1. Tính $C=101^2+102^2+103^2+...+199^2+200^2$

Lời giải:

Ta có:

Đặt:

$C_1=1^2+2^2+3^2+...+200^2$
$C_2=1^2+2^2+3^2+\ ...+100^2$

Khi đó ta áp dụng công thức tổng quát để tính $C_1;C_2$

Từ đó: $C=C_1-C_2$

Ta có: $C_1=\dfrac{200.201.(2.200+1)}{6}=2686700$

$C_2=\dfrac{100.101.(2.100+1)}{6}=338350$

$\Rightarrow C=C_1-C_2=2686700-338350=2348350$

Bài 2. Tìm số tự nhiên n biết tổng các bình phương các số tự nhiên từ 1 đến n là 506.

Lời giải:

Vì tổng tổng các bình phương các số tự nhiên từ 1 đến n là 506 nên

$1^2+2^2+...+n^2=506$

$\Rightarrow \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=506$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1)=22.23.6$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1)=11.2.23.6$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1)=11.12.23$

$\Rightarrow n(n+1)(2n+1)=11(11+1)(2.11+1)$

$\Rightarrow n=11$

Dạng 7: Tổng có dạng $S=1^2+3^2+5^2+.....+(2k-1)^2$

Bài 1 : Tính tổng $A=1-2+2^2-2^3+2^4-...-2^{99}+2^{100}$

Lời giải :

$A=1-2+2^2-2^3+2^4-...-2^{99}+2^{100}$

$2A = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + 2^5 - 2^{100} + 2^{101}$

$\Rightarrow 2A + A = 2^{101} + 1 \Rightarrow A = \dfrac{2^{101}+1}{3}$

Bài 2. Tìm n nhỏ nhất sao cho tổng của n số chính phương lẻ đầu tiên chia hết cho 3

Lời giải :

Ta có $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Mà $(2n-1, 2n+1) = 2; (n, 2n-1) = 1; (n, 2n+1) = 1$ nên trong 3 số $n, 2n-1, 2n+1$ chỉ có 1 số chia hết cho 3 , mà muốn A chia hết cho 3 thì 1 trong 3 số trên phải chia hết cho 9. Để n nhỏ nhất thì $2n+1 = 9$. Suy ra $n = 4$.

Vậy $n = 4$ là số cần tìm

Bài 3 : Tính tổng $A = 1.3 + 3.7 + 5.11 + \ldots + 99.199$

Lời giải :

Ta có $(2n-1)(4n-1) = 2(2n-1)^2 + 2n - 1$

$\Rightarrow A = 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2) + (1 + 3 + 5 + \ldots + 99)$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{50(100-1)(100+1)}{3} - 50^2 = 166650 - 2500 = 164150$

Bài 4 : Tính tổng $A = 1.2 + 3.4 + \ldots + 2(2n+1)(n+1)$

Lời giải :

Ta có $(2n+1)(2n+2) = 4n^2 + 6n + 2 = (2n+1)^2 + 2n + 1$

$\Rightarrow A = (1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2) + (1 + 3 + \ldots + (2n+1))$

$A = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (n+1)^2$

$A = \dfrac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3 + 3n + 3)}{3}$

$A = \dfrac{(n+1)(4n+3)(n+2)}{3}$

Dạng 8: Tổng có dạng: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (k-1)^2$ **(k lẻ và** $k \in \mathbb{N}$**)**

Bài 1. Tính tổng $D = 6^2 + 8^2 + 10^2 + \ldots + 102^2$

Phân tích: Sử dụng công thức $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (k-1)^2 = \dfrac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k = 103$

Lời giải

Áp dụng công thức: $S=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$ với $k=103$. Ta được:

$S=2^2+4^2+6^2+...+102^2=\frac{102.103.104}{6}=182104$.

Mặt khác: $S=2^2+4^2+6^2+8^2+...+102^2=2^2+4^2+D$

Suy ra: $D=S-2^2-4^2=182104-2^2-4^2=182084$.

Bài 2. Tính tổng $E=12^2+14^2+...+2010^2$.

Phân tích: Sử dụng công thức $S=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$.

Tính $E_1=2^2+4^2+...+(k-1)^2$ với $k=11$.

Tính $E_2=2^2+4^2+6^2+(k-1)^2$ với $k=2010$.

Khi đó: $E=E_2-E_1$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $S=2^2+4^2+6^2+...+(k-1)^2=\frac{(k-1).k.(k+1)}{6}$.

Đặt $E_1=2^2+4^2+6^2+...+10^2=\frac{10.11.12}{6}$.

Đặt $E_2=2^2+4^2+6^2+2010^2=\frac{2010.2011.2012}{6}$.

Khi đó: $E=E_2-E_1=\frac{2010.2011.2012}{6}-\frac{10.11.12}{6}=1355454000$.

Bài 3. Tính tổng: $F=1^2+2^2+3^2+...+101^2$.

Phân tích: Tổng F có dạng $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=101$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=101$.

Ta được: $F=1^2+2^2+3^2+...+101^2=\frac{101.102.203}{6}=348551$.

Bài 4. Tính tổng: $G=1+4+9+16+25+...+10000$.

Phân tích: Tổng $G=1+2^2+3^2+4^2+5^2+...+100^2$.

Áp dụng dạng $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=100$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $P=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ với $n=100$. Ta được:

$1+2^2+3^2+4^2+5^2+...+100^2=\frac{100.101.201}{6}=338350$.

Suy ra: $1+4+9+16+25+...+10000=338350$.

Vậy $G=338350$.

Bài 5. Tính tổng $K=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2$.

Phân tích: Tính $K_1=1^2+3^2+5^2+...+19^2$.

Tính $K_2=2^2+4^2+6^2+....+20^2$.

Tính $K=-K_1+K_2$.

Lời giải

Đặt $K_1=1^2+3^2+5^2+...+19^2=\frac{19.20.21}{6}$.

Đặt $K_2=2^2+4^2+6^2+...+20^2=\frac{20.21.22}{6}$.

Khi đó: $K=-K_1+K_2=-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...-19^2+20^2=-\frac{19.20.21}{6}+\frac{20.21.22}{6}=210$.

Bài 6. Biết rằng $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$. Tính tổng $M=2^2+4^2+6^2+...+20^2$.

Lời giải

Ta có: $M=2^2+4^2+6^2+...+20^2$.

Suy ra: $\frac{M}{2^2}=1+2^2+3^2+...+10^2$.

Mà $1^2+2^2+3^2+...+10^2=385$.

Nên $\frac{M}{2^2}=385$.

Vậy $M=2^2.385=1540$.

Dạng 9: Tổng có dạng $S=a_1.a_2+a_2.a_3+a_3.a_4+a_4.a_5+....+a_{n-1}.a_n$

Bài 1. Tính tổng $S=1.2+2.3+3.4+.....+99.100$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 1. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 3) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải

Ta có:

$3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \ldots + 99.100.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \ldots + 99.100(101-98)$

$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \ldots - 98.99.100 + 99.100.101$

$\Rightarrow S = \dfrac{99.100.101}{3} = 33.100.101 = 333300.$

Vậy $S = 333300.$

Bài toán tổng quát:

Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + (n-1).n$

Ta có: $3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \ldots + (n-1)n.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \ldots + (n-1)n.[(n+1)-(n-2)]$

$= 1.2(n-1).n.(n+1).3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \ldots - (n-2).(n-1).n + (n-1).n.(n+1)$

$= (n-1).n.(n+1)$

$\Rightarrow S = \dfrac{(n-1).n.(n+1)}{3}$

Vậy: $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + (n-1).n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Bài 2. Tính tổng $S = 2.6 + 6.10 + 10.14 + \ldots + 46.50$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải

Ta có:

$12S = 2.6.12 + 6.10.12 + 10.14.12 + \ldots + 46.50.12$

$= 2.6.(10+2) + 6.10.(14-2) + 10.14.(18-6) + \ldots + 46.50.(54-42)$

$= 2.6.10 + 2.6.2 + 6.10.14 - 2.6.10 + 10.14.18 - 6.10.14 + \ldots + 46.50.54 - 42.46.50$

$= 24 + 46.50.54$

$\Rightarrow S = \dfrac{24 + 46.50.54}{12} = 10352$

Vậy $S = 10352.$

Bài 3. Tính tổng $S = 4.9 + 9.14 + \ldots + 44.49$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 5. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 15) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải

Ta có:

$15S = 4.9.15 + 9.14.15 + ... + 44.49.15$

$= 4.9.(14+1) + 9.14.(19-4) + ... + 44.49.(54-39)$

$= 4.9.14 + 4.9.1 + 9.14.19 - 4.9.$

$14 + ... + 44.49.54 - 39.44.49$

$= 36 + 44.49.54$

$\Rightarrow S = \dfrac{36 + 44.49.54}{15} = 7764$

Vậy $S = 7764.$

Bài 4. Tính tổng $S = 2.4 + 4.6 + ... + 48.50$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 2. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 6) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải

Ta có:

$6S = 2.4.6 + 4.6.6 + ... + 48.50.6$

$= 2.4.6 + 4.6.(8-2) + ... + 48.50.(52-46)$

$= 2.4.6 + 4.6.8 - 4.6.2 + ... + 48.50.52 - 46.48.50$

$= 48.50.52$

$\Rightarrow S = \dfrac{48.50.52}{6} = 20800.$

Vậy $S = 20800.$

Bài 5. Tính tổng $S = 1.5 + 5.9 + ... + 97.101$

Phân tích: Vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 4. Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 12) rồi tách để xuất hiện các số hạng đối nhau.

Lời giải

Ta có:

$12S = 1.5.12 + 5.9.12 + ... + 97.101.12$

$= 1.5.(9+3) + 5.9.(13-1) + ... + 97.101.105 - 93.97.101$

$=1.5.9+1.5.3+5.9.13-1.5.9+...+97.101.105-93.97.101$

$=97.101.105+1.5.3$

$=1028700$

$\Rightarrow S=\dfrac{1028700}{12}=85725.$

Vậy $S=85725.$

Dạng 10: Tổng có dạng $S=1.a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_5+...+a_{n-2}a_{n-1}a_n$

Trong đó $a_2-1=a_3-a_2=a_4-a_3=...=a_n-a_{n-1}=k \Rightarrow a_n=1+(n-1)k$.

Bài 1. Tính tổng $M=1.3.5+3.5.7+7.9.11+...+99.101.103$

Phân tích: Ta áp dụng dạng toán trên với $a_2=3, k=2$

Lời giải

$M=1.3.5+3.5.7+5.7.9+...+99.101.103$

$8M=1.3.5.8+3.5.7.(9-1)+5.7.9.(11-3)+...+99.101.103.(105-97)$

$8M=1.3.5.8+3.5.7.9-3.5.7+5.7.9.11-3.5.7.9+...+99.101.103.105-97.99.101.103$

$8M=1.3.5.8-3.5.7+99.101.103.105$

$8M=108139200$

$M=13517400$

Bài 2. Tính tổng $N=1.4.7+4.7.10+7.10.13+...+100.103.106$

Phân tích

Ta áp dụng dạng toán trên với $a_2=4, k=3$

Khi đó

$a_n=106$

$106=1+(n-1)k$

$105=(n-1).3$

$35=n-1$

$n=36$

Lời giải

$N=1.4.7+4.7.10+7.10.13+...+100.103.106$

$12N=1.4.7.12+4.7.10.(13-1)+7.10.13.(16-4)+...+100.103.106.(109-97)$

$12N=1.4.7.12+4.7.10.13-4.7.10+7.10.13.16-4.7.10.13+...+100.103.106.109-97.100.103.106$

$12N=100.103.106.109+1.4.7.12-4.7.10$

$12N=119006256$

$N=9917188$

Bài 3. Tính tổng $P=50.51.52+51.52.53+52.53.54+...+98.99.100$

Phân tích

Ta có

$$P = 50.51.52 + 52.53.54 + ... + 98.99.100$$
$$= (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100) - (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51)$$

Ta tính hai tổng sau

$$A = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100$$

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51$$

Lời giải

+) Tính tổng

$$A = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100.$$

Áp dụng **ví dụ**, ta tính được $A = 24497550$

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51$$

Tương tự áp dụng công thức (*) với $k = 1, a_k = k, n = 51$ ta có

$$B = \frac{49.50.51.52 + 4.1.2.3 - 2.3.4}{4.1} = 1624350$$

+) Tính

$$P = 50.51.52 + 52.53.54 + ... + 98.99.100$$
$$= (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100) - (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 49.50.51)$$
$$= A - B$$
$$= 24497550 - 1624350$$
$$= 22873200$$

Bài 4. Tính tổng $A = 1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + ... + 99.100.101$

Phân tích

Trong bài toán này, ta không nhân A với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện dãy số mà ta biết cách tính hoặc dễ dàng tính được.

Lời giải

$$A = 1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + ... + 99.100.101$$

$$A = 1.3.(5-3) + 3.5.(7-3) + 5.7.(9-3) + ... + 99.101.(103-3)$$

$A = 1.3.5 - 1.3.3 + 3.5.7 - 3.5.5 + 5.7.9 - 5.7.3 + ... + 99.101.103 - 99.101.3$

$A = (1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ... + 99.101.103) - 3.(1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101)$

Từ đó ta có,

$M = 1.3.5 + 3.5.7 + 7.9.11 + ... + 99.101.103$

$N = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101$

Áp dụng bài 1, ta tính được $M = 13517400$

Ta chỉ cần đi tính

$N = 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + 99.101$

$6N = 1.3.6 + 3.5.(7-1) + 5.7.(9-3) + ... + 99.101.(103-97)$

$6N = 1.3.6 + 3.5.7 - 3.5 + 5.7.9 - 3.5.7 + ... + 99.101.103 - 97.99.101$

$6N = 1.3.6 - 3.5 + 99.101.103$

$6N = 1029900$

$N = 171650$

Do đó

$A = M - 3.N$

$A = 13517400 - 3.171650$

$A = 13002450$

Bình luận

Ta nhận thấy rằng cách tính M là nhân M với $4k$ ở đó k là khoảng cách giữa 2 số liên tiếp vì mỗi số hạng của M có 3 thừa số, còn cách tính N cũng tương tự. Tuy nhiên để tính N ta nhân N với 3 lần khoảng cách giữa 2 số liên tiếp vì mỗi số hạng của N có 2 thừa số.

Bài toán tổng quát

$A = 1.2.3 + 3.4.5 + ... + (2n-1).2n.(2n+1)$ $(n \in N^*, n \geq 2)$.

Bài tập tương tự

Tính

$A = 1.2.3 + 3.4.5 + ... + 49.51.53$

$B = 27.28.29 + 28.29.30 + ... + 59.60.61$.

Bài 5. Tính tổng $K = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + 99.100^2$

Phân tích

Trong bài toán này, tương tự **bài 4** ta không nhân K với một số mà tách ngay một thừa số trong mỗi số hạng làm xuất hiện dãy số mà ta biết cách tính hoặc dễ dàng tính được. Ở bài này ta tách $n^2 = n.\left[(n+1)-1\right]$ với mỗi bình phương.

Lời giải

$K = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + 98.99^2$

$K = 1.2.(3-1) + 2.3.(4-1) + ... + 98.99.(100-1)$

$K = 1.2.3 - 1.2 + 2.3.4 - 2.3 + ... + 98.99.100 - 98.99$

$K = (1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100) - (1.2 + 2.3 + ... + 98.99)$

Từ đó ta tính

$A = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100$
$B = 1.2 + 2.3 + ... + 98.99$

+) Tính tổng

$A = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 98.99.100$

Áp dụng **ví dụ** , ta tính được $A = 24497550$.

+) Tính tổng $B = 1.2 + 2.3 + ... + 98.99$.

Áp dụng Lý thuyết với

Áp dụng **Lý thuyết,** với $k = 1, n = 99 \Rightarrow a_k = k$ (với mọi $1 \le k \le n$), ta tính được

$$B = \frac{98.99.100 + 3.1.2 - 2.3}{3} = \frac{98.99.100}{3} = 323400$$

Vậy

$K = A - B$

$K = 24497550 - 323400$

$K = 24174150$

Bài toán tổng quát

$$A = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + (n-1).n^2 (n \in N^*, n \geq 2)$$

Bài tập tương tự

Tính $A = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + 49.50^2$

Dạng 11: Tổng có dạng $A = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Bài 1: Tính tổng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (2n)^3$

Lời giải :

$$A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (2n)^3$$

$$A = (1^3 + (2n)^3) + (2^3 + (2n-1)^3) + ... + (n^3 + (n+1)^3)$$

$$A = (2n+1)(1^2 - 2n + (2n)^2) + (2n+1)(2^2 - 2.(2n-1) + (2n-1)^2) + ... + (2n+1)(n^2 - n(2n-(n-1)) + (n+1)^2)$$
$$A = (2n+1)(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (2n)^2 - [2n(1+2+3+...+n) - (1.2 + 2.3 + ... + (n-1)n)]$$

$$A = (2n+1)\left[\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - n^2(n+1) + \frac{n(n-1)(n+1)}{3}\right]$$

$$A = n(2n+1).\frac{8n^2 + 6n + 1 - 3n^2 - 3n + n^2 - 1}{3}$$

$$A = n(2n+1)\left(\frac{6n^2 + 3n}{3}\right) = (n(2n+1))^2$$

Dạng 13: Liên phân số

Bài 1. Viết kết quả các biểu thức sau dưới dạng phân số $B = \dfrac{2}{5 + \dfrac{1}{6 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{8}}}}$.

Lời giải

$$B = \frac{2}{5 + \dfrac{1}{6 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{8}}}} = \frac{2}{5 + \dfrac{1}{6 + \dfrac{1}{\dfrac{57}{8}}}} = \frac{2}{5 + \dfrac{1}{6 + \dfrac{8}{57}}} = \frac{2}{5 + \dfrac{1}{\dfrac{350}{57}}} = \frac{2}{5 + \dfrac{57}{350}} = \frac{2}{\dfrac{1807}{350}} = \frac{700}{1807}$$

Bài 2. Tính nhanh $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}}{\frac{2}{3}+\frac{2}{7}-\frac{2}{13}}.\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{3}{16}+\frac{3}{64}-\frac{3}{256}}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}}+\dfrac{5}{8}$

Lời giải

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}}{\frac{2}{3}+\frac{2}{7}-\frac{2}{13}}.\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{16}+\frac{3}{64}-\frac{3}{256}}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}}+\frac{5}{8}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}}{2.\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)}.\frac{\frac{3}{4}.\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}\right)}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}}+\frac{5}{8}=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=1$$

Bài 3. Tìm $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ biết : $\dfrac{30}{43}=\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}}$.

Lời giải

$$\frac{30}{43}=\frac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}}\Rightarrow\frac{1}{\frac{43}{30}}=\frac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}}$$

$$\Rightarrow\frac{43}{30}=a+\frac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}\Rightarrow 1+\frac{13}{30}=a+\frac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ \dfrac{13}{30}=\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}\end{cases}$$

$$\frac{13}{30}=\frac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}\Rightarrow\frac{30}{13}=b+\frac{1}{c+\dfrac{1}{d}}\Rightarrow 2+\frac{4}{13}=b+\frac{1}{c+\dfrac{1}{d}}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ \dfrac{4}{13}=\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}\end{cases}$$

$$\frac{4}{13}=\frac{1}{c+\dfrac{1}{d}}\Rightarrow\frac{13}{4}=c+\frac{1}{d}\Rightarrow 3+\frac{1}{4}=c+\frac{1}{d}\Rightarrow\begin{cases}c=3\\ d=4\end{cases}$$

Vậy $a=1,b=2,c=3,d=4$.

Bài 4. Rút gọn $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{\frac{1}{199}+\frac{2}{198}+\frac{3}{197}+...+\frac{198}{2}+\frac{199}{1}}$

Lời giải

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{\frac{1}{199}+\frac{2}{198}+\frac{3}{197}+...+\frac{198}{2}+\frac{199}{1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{\left(\frac{1}{199}+1\right)+\left(\frac{2}{198}+1\right)+\left(\frac{3}{197}+1\right)+...+\left(\frac{198}{2}+1\right)+\left(\frac{199}{1}+1\right)-199}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{200.\left(\frac{1}{199}+\frac{1}{198}+\frac{1}{197}+...+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)-199}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{200.\left(\frac{1}{199}+\frac{1}{198}+\frac{1}{197}+...+\frac{1}{2}\right)+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}}{200.\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{199}+\frac{1}{198}+\frac{1}{197}+...+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{200}$$

Bài 5. Tìm nghiệm của phương trình sau $\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{3+\dfrac{4}{5+\dfrac{6}{7+\dfrac{8}{9+\dfrac{10}{11}}}}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{6}}}}}}$

Lời giải

$$\frac{1}{x+\frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{6}{7+\frac{8}{9+\frac{10}{11}}}}}}=\frac{1}{1-\frac{x}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}}}}\text{ ------}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{6}{7+\frac{8}{9+\frac{10}{11}}}}}=1-\frac{x}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}}}\text{ ---------}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{9818}{18131}=1-\frac{421x}{972}\Leftrightarrow\frac{1393x}{972}=\frac{8313}{18131}$$ ----

$$\Leftrightarrow x=\frac{8313}{18131}.\frac{972}{1393}=\frac{8080236}{25256483}$$

TAILIEU.COM

B.BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG 6

Bài 1. (Đề thi HSG 6 huyện)

Chứng minh : Với $k \in N^*$ ta luôn có : $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3.k(k+1)$.

Áp dụng tính tổng :S = $1.2+2.3+3.4+...+n.(n+1)$.

Lời giải

Biến đổi :

$$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=k(k+1)\left[(k+2)-(k-1)\right]=3k(k+1)$$

Áp dụng tính :

$3.(1.2)=1.2.3-0.1.2.$

$3.(2.3)=2.3.4-1.2.3.$

$3.(3.4)=3.4.5-2.3.4.$

.....

$3.n(n+1)=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$

Cộng lại ta có :

$$3.S=n(n+1)(n+2)\Rightarrow S=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Bài 2. (Đề thi HSG 6 huyện)

Cho $S = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots + 5^{2006}$

a) Tính S

b) Chứng minh S$\vdots$126

Lời giải

a) Ta có $5S = 5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots\ldots\ldots + 5^{2007}$

$5S - S = \left(5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots\ldots\ldots + 5^{2007}\right) - \left(5 + 5^2 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots + 5^{2006}\right)$

$4S = 5^{2007} - 5$

Vậy S = $\dfrac{5^{2007}-5}{4}$

b) $S = \left(5 + 5^4\right) + \left(5^2 + 5^5\right) + \left(5^3 + 5^6\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(5^{2003} + 5^{2006}\right)$

Biến đổi được $S = 126.\left(5 + 5^2 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots + 5^{2003}\right)$

Vì 126 $\vdots$ 126 $\Rightarrow$ S $\vdots$ 126

Bài 3. (Đề thi HSG 6)

Cho số: A = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 …….58 59 60.

- Số A có bao nhiêu chữ số?
- Hãy xóa đi 100 chữ số trong số A sao cho số còn lại là:
  + Nhỏ nhất
  + Lớn nhất

Lời giải

A = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 …… 58 59 60.

* Từ 1 đến 9 có : 9 chữ số

Từ 10 đến 60 có: 51 . 2 = 102 chữ số.

Vậy: Số A có 9 + 102 = 111 chữ số. (0,5đ)

* Nếu xóa 100 chữ số trong số A thì số A còn 11 chữ số. Trong số A có 6 chữ số 0 nhưng có 5 chữ số 0 đứng trước các chữ số 51 52 53 …. 58 59 60.

$\Rightarrow$ Trong số nhỏ nhất có 5 chữ số 0 đứng trước $\Rightarrow$ số nhỏ nhất là số có 6 chữ số.

$\Rightarrow$ Số nhỏ nhất là 00000123450 = 123450 (0,5đ).

* Trong số A có 6 chữ số 9. Nếu số lớn nhất có 6 chữ số 9 đứng liền nhau thì số đó là: 99999960

$\Rightarrow$ Số này chỉ có 8 chữ số không thỏa mãn.

$\Rightarrow$ Số lớn nhất chỉ có 5 chữ số 9 liền nhau số đó có dạng 99999….

$\Rightarrow$ Các chữ số còn lại 78 59 60.

Vậy số lớn nhất: 99999785860.

Bài 4. (Đề thi HSG 6)

Cho: $A=\frac{1}{3.8}+\frac{1}{8.13}+\frac{1}{13.18}+\cdots\cdots+\frac{1}{33.38}$ **;** $B=\frac{1}{3.10}+\frac{1}{10.17}+\frac{1}{17.24}+\frac{1}{24.31}+\frac{1}{31.38}$

Tìm x **biết:** $\dfrac{\left(28\frac{3}{7}-27\frac{5}{9}\right)\left(2^{26}+5.4^{12}\right)}{8^{8}\left(x-4\right)}=\dfrac{B}{A}$

Lời giải

Ta có: A = $\frac{1}{3.8}+\frac{1}{8.13}+\frac{1}{13.18}+...+\frac{1}{33.38}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{38}\right)$

B = $\frac{1}{3.10}+\frac{1}{10.17}+...+\frac{1}{31.38}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{38}\right)$

$\Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{1}{5}:\frac{1}{7}=\frac{7}{5}\Rightarrow \frac{B}{A}=\frac{5}{7}$

$\dfrac{\frac{55}{63}.9.2^{24}}{2^{24}\left(x-4\right)}=\frac{5}{7}$

$\frac{55}{7\left(x-4\right)}=\frac{5}{7}\Rightarrow \frac{11}{x-4}=1\Rightarrow x=15.$

Bài 5. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh rằng: A= (1999 + 1999^2 + 1999^3 +.+ 1999^{1998}) ⋮ 2000.

Lời giải

$A=1999\left(1+1999\right)+1999^{3}\left(1+1999\right)+\ldots+1999^{1997}\left(1+1999\right)$

$=2000\left(1999+1999^{3}+\ldots+1999^{1997}\right)2000\Rightarrow A\vdots 2000.$

Bài 6. (Đề thi HSG 6)

Tính tỷ số $\frac{A}{B}$ **biết** $A=\frac{4}{7.31}+\frac{6}{7.41}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57}$**,** $B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}$

Lời giải

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}A=\frac{4}{7.31}+\frac{6}{35.41}+\frac{9}{50.41}+\frac{7}{50.57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}\\ \frac{1}{2}B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{5}A=\frac{1}{2}B\Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{5}{2}.$$

Bài 7. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh rằng : $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<1$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{2.1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

.....

$\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

Vậy $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}<1$

Bài 8. (Đề thi HSG 6 huyện 2013 - 2014)

Tính tổng: $S=3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^9}$.

Lời giải

$S=3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^9}$

$S=3+\frac{1}{2}\left(3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^8}\right)$

Mà $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^8}=S-\frac{3}{2^9}$

Suy ra $S=3+\frac{1}{2}\left(S-\frac{3}{2^9}\right)$

Hay $2S=6+S-\frac{3}{2^9}$.Suy ra $S=6-\frac{3}{2^9}=6-\frac{3}{512}=\frac{3069}{512}$.

Bài 9. (Đề thi HSG 6 huyện Hưng Hà)

a) Tính giá trị của biểu thức:

$A=\ -1\ \ -1^{\ 2}\ -1^{\ 3}\ -1^{\ 4}...\ -1^{\ 2014}$

$B=\frac{1}{7}\left(\frac{555}{222}+\frac{4444}{12221}+\frac{33333}{244442}+\frac{11}{330}+\frac{13}{60}\right)$

b) Cho $E=92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-...-\frac{92}{100};F=\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+...+\frac{1}{500}$. Tính $\frac{E}{F}$.

Lời giải

a) Ta thấy A là tích các luỹ thừa cơ số là -1 với các số mũ tự nhiên liên tiếp tăng dần từ 1 tới 2014.

Số các thừa số của A là: $2014-1+1=2014$ (thừa số)

$A=\ -1\ .1.\ -1\ .1.\ ...\ .\ -1\ .1$

A có $2014:2=1007$ thừa số -1 và 1007 thừa số 1.

Vậy $A=1$.

$$B=\frac{1}{7}\left(\frac{555}{222}+\frac{444}{12221}+\frac{33333}{24444}+\frac{11}{330}+\frac{13}{60}\right)=\frac{1}{7}\left(\frac{5}{2.1}+\frac{4}{1.11}+\frac{3}{11.2}+\frac{1}{2.15}+\frac{13}{15.4}\right)$$

$$=\frac{5}{2.7}+\frac{4}{7.11}+\frac{3}{11.14}+\frac{1}{14.15}+\frac{13}{15.28}=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{28}$$

Vậy $B=\frac{1}{2}-\frac{1}{28}=\frac{13}{28}$.

b) $E=92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-...-\frac{92}{100}$

Số các số hạng của A là: $1+92-1+1=93$ (số hạng)

$E=\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{2}{10}\right)+\left(1-\frac{3}{11}\right)+...+\left(1-\frac{92}{100}\right)$ (Có 92 nhóm)

$$E=\frac{8}{9}+\frac{8}{10}+\frac{8}{11}+...+\frac{8}{100}=8\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{100}\right)$$

Mà $F=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{100}\right)\Rightarrow\frac{E}{F}=8:\frac{1}{5}=40$.

Bài 10.(Đề thi HSG 6 huyện 2012 - 2013)

Cho $S=2^1+2^2+2^3+...+2^{100}$.

a) Chứng minh rằng $S\vdots 15$

b) Tìm chữ số tận cùng của S.

c) Tính tổng S.

Lời giải

a) $S=2^1+2^2+2^3+...+2^{100}$

Tổng trên gồm 100 số hạng được chia thành 4 nhóm, mỗi nhóm có 4 số hạng ta có:

$$S=2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+...+2^{97}+2^{98}+2^{99}+2^{100}$$

$$=2\ 1+2+2^2+2^3+2^5\ 1+2+2^2+2^3+...+2^{97}\ 1+2+2^2+2^3$$

$$=2.15+2^5.15+...+2^{97}.15$$

$$=15\ 2+2^5+...+2^{97}\ \vdots 15$$ (đpcm)

b) Vì $S\vdots 15\Rightarrow S\vdots 5$ (1)

Lại có tất cả các số hạng của S đều chia hết cho 2 nên $S\vdots 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S\vdots 10$ hay S có chữ số tận cùng là 0.

c) $2S-S=2\ 2^1+2^2+2^3+...+2^{100}-2^1+2^2+2^3+...+2^{100}$

$$S=2^2+2^3+2^4+...+2^{101}-2^1+2^2+2^3+...+2^{100}$$

hay $S=2^{101}-2$.

Bài 11.(Đề thi HSG 6 huyện 2013 - 2014)

Chứng minh rằng:

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}$

b) $\frac{51}{2}.\frac{52}{2}.....\frac{100}{2}=1.3.5.....99$

Lời giải

a) Ta có $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$

$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{199}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{200}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{200}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{100}\right)$

$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{200}$ (ĐPCM).

b) Ta có:

$1.3.5.....99=\frac{1.3.5.....99\quad 2.4.6.....100}{2.4.6.....100}=\frac{1.2.3.4.5.6.....99.100}{1.2\quad 2.2\quad 2.3\ .....\ 2.50}$

$=\frac{1.2.3.....99.100}{1.2.3.....49.50\ \underbrace{2.2.2.....2}_{50cs2}}=\frac{51.52.53.....99.100}{\underbrace{2.2.2.....2}_{50cs2}}=\frac{51}{2}.\frac{52}{2}.\frac{53}{2}.....\frac{100}{2}$

Bài 12.(Đề thi HSG 6 huyện 2013 - 2014)

Cho $S=5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+...+5^{2012}$. Chứng tỏ S chia hết cho 65.

Lời giải

$S=5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+...+5^{2012}$

$S=5+5^2+5^3+5^4+5^5\ 5+5^2+5^3+5^4+....+5^{2009}(5+5^2+5^3+5^4)$

Vì $5+5^2+5^3+5^4=780\vdots 65$. Vậy S chia hết cho 65.

Bài 13.(Đề thi HSG 6 huyện 2006 - 2007)

a) Cho tổng gồm 2014 số hạng: $S=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{4^4}+...+\frac{2014}{4^{2014}}$.

Chứng minh rằng: $S<\frac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n, biết rằng: $n+S_n=2014$, trong đó S_n là tổng các chữ số của n.

Lời giải

a) Ta có $4S=1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+...+\frac{2014}{4^{2013}}$

Suy ra: $3S=4S-S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^{2013}}-\frac{2014}{4^{2014}}$

$\Rightarrow 3S < 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^{2013}}$. Đặt $M=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^{2013}}$

$\Rightarrow 4M = 4+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^{2012}}$.

Ta có: $3M = 4M - M = 4-\frac{1}{4^{2013}} \Rightarrow M < \frac{4}{3}$.

Do đó: $3S < \frac{4}{3} \Rightarrow S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} < \frac{1}{2}$.

b) Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n < 999$ và $S_n \le 27$.

Suy ra: $n + S_n \le 999 + 27 = 1026 < 2014$ (không thỏa mãn).

Mặt khác $n \le n + S_n = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số.

Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S_n \le 9.4 = 36$. Do vậy $n \ge 2014 - 36 = 1978$.

Vì $1978 \le n \le 2014$ nên $n = \overline{19ab}$ hoặc $n = \overline{20cd}$.

* Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + 1 + 9 + a + b = 2014$

$\Leftrightarrow 1910 + 11a + 2b = 2014 \Leftrightarrow 11a + 2b = 104 \Rightarrow a \vdots 2$

và $11a = 104 - 2b \ge 104 - 2.9 = 86 \Rightarrow 8 \le a < 10$, mà $a \vdots 2$ nên $a = 8$.

$\Rightarrow b = 8 \Rightarrow n = 1988$ (thỏa mãn).

* Nếu $n = \overline{20cd}$. Ta có: $\overline{20cd} + 2 + 0 + c + d = 2014$

$\Rightarrow 2002 + 11c + 2d = 2014 \Rightarrow 11c + 2d = 12 \Rightarrow c \vdots 2$

Và $11c \le 12$, nên $c = 0$ hoặc $c = 1$.

+ Với $c = 0$ thì $d = 6$, ta có $n = 2006$ (thỏa mãn)

+ Với $c = 1$ thì $2d = 1$ (không thỏa mãn).

Vậy $n \in \{1988; 2006\}$.

Bài 14. (Đề thi HSG 6 huyện)

Tính: $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{20}$

Lời giải

Ta có : $2A = 8 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{21}$

$\Rightarrow 2A - A = 2^{21} + 8 - (4 + 2^2) + (2^3 - 2^3) + ... + (2^{20} - 2^{20}) = 2^{21}$

Bài 15. (Đề thi HSG 6 huyện)

Cho : $S = 3^0 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{2002}$

a) Tính S

b) Chứng minh $S \vdots 7$

Lời giải

a) Ta có $3^2 S = 3^2 + 3^4 + ... + 3^{2002} + 3^{2004}$

Suy ra : $8S = 3^{2004} - 1 \Rightarrow S = \frac{3^{2004} - 1}{8}$

b) $S = (3^0 + 3^2 + 3^4) + 3^6(3^0 + 3^2 + 3^4) + ... + 3^{1998}(3^0 + 3^2 + 3^4)$

$=\left(3^0+3^2+3^4\right)\left(1+3^6+...+3^{1998}\right)$

$=91\left(1+3^6+...+3^{1998}\right)$

Suy ra : $S\vdots 7$

Bài 16. (Đề thi HSG 6 huyện)

Chứng minh tổng sau chia hết cho 7.

$$A=2^1+2^2+2^3+2^4+...+2^{59}+2^{60}$$

Lời giải

Ta có: $A=2^1+2^2+2^3+2^4+...+2^{59}+2^{60}$

$=\left(2^1+2^2+2^3\right)+\left(2^4+2^5+2^6\right)+...+\left(2^{58}+2^{59}+2^{60}\right)$

$=\left(2^1+2^2+2^3\right)+2^3\left(2^1+2^2+2^3\right)+...+2^{57}\left(2^1+2^2+2^3\right)$

$=\left(2^1+2^2+2^3\right)\left(1+2^3+...+2^{57}\right)=14.\left(1+2^3+...+2^{57}\right)\vdots 7$

Vậy $A\vdots 7$

Bài 17. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

a) Đặt A= $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow$ 2A= $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow$ 2A+A =3A = $1-\frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1$

$\Rightarrow$ 3A < 1 $\Rightarrow$ A <

b) Đặt $A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+...+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 3A=1-\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^3}+...+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow\ 4A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow\ 4A<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

Đặt B= $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ $\Rightarrow$ 3B= $2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

4B = B+3B= $3-\frac{1}{3^{99}}$ < 3 $\Rightarrow$ B < $\frac{3}{4}$ (2)

Từ (1)và (2) $\Rightarrow$ 4A < B < $\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ A < $\frac{3}{16}$

Bài 18. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}<1.$$

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$

Áp dụng : $\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3};...;\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}<1-\frac{1}{n}<1.$$

Bài 19. (Đề thi HSG 6)

Tính tổng: B = $\frac{2}{1.4}+\frac{2}{4.7}+\frac{2}{7.10}+....+\frac{2}{97.100}$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{1.4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\frac{2}{1.4}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\frac{2}{4.7}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right);\frac{2}{7.10}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right);....$

$.....;\ \frac{2}{97.100}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

$\Rightarrow$ B= $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

$\Rightarrow$ B= $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{100}\right)=\frac{2}{3}.\frac{99}{100}=\frac{33}{50}$

Bài 20.(Đề thi HSG62019-2020)

Tính tổng $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{100}}$

Lời giải

Ta có $3A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{99}}$ $3A-A=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{99}}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{100}}\right)$

$2A=1-\frac{1}{3^{100}}=\frac{3^{100}-1}{3^{100}}$

suy ra $A=\frac{3^{100}-1}{2.3^{100}}$

Bài 21.(Đề thi HSG 6 2019-2020)

a) Tính tổng: M = $\frac{10}{56}+\frac{10}{140}+\frac{10}{260}+....+\frac{10}{1400}$

b) Cho S = $\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}$. Chứng minh rằng : 1< S < 2

Lời giải

a) $M=\frac{10}{56}+\frac{10}{140}+\frac{10}{260}+\ldots+\frac{10}{1400}=\frac{5}{4.7}+\frac{5}{7.10}+\frac{5}{10.13}+\ldots+\frac{5}{25.28}$

$\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{25}-\frac{1}{28}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{28}\right)=\frac{5}{14}$

b) $S=\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}>\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}+\frac{3}{15}\Rightarrow S>\frac{15}{15}=1$ (1)

$S=\frac{3}{10}+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}+\frac{3}{13}+\frac{3}{14}>\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\Rightarrow S<\frac{15}{10}<\frac{20}{10}=2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $1<S<2$

Bài 22.(Đề thi HSG 6)

Cho $A=3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{2006}$

a) Thu gọn A

b) Tìm x để 2A+3 = 3^x

Lời giải

a) A = $3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{2006}$

$\Rightarrow$ 3A = $3^2+3^3+3^4+\ldots+3^{2007}$

$\Rightarrow$ 3A – A = $3^{2007}-3$

$\Rightarrow$ A = $\frac{3^{2007}-3}{2}$

b) Ta có : 2. $\frac{3^{2007}-3}{2}+3=3^x$ =>

$3^{2007}-3+3=3^x$ => $3^{2007}=3^x$ => x = 2007

Bài 23.(Đề thi HSG 6)

Cho B = $3+3^2+3^3+\ldots+3^{100}$

Tìm số tự nhiên n, biết rằng 2B + 3 = 3^n

Lời giải

B = $3+3^2+3^3+\ldots+3^{99}+3^{100}$ (1)

3B = $3^2+3^3+\ldots+3^{100}+3^{101}$ (2)

Lấy (2) trừ (1) ta được: 2B = $3^{101}-3$

Do đó: 2B + 3 = 3^{101}

Theo đề bài 3B + 3 = 3^n . Vậy n = 101

Bài 24.(Đề thi HSG 6)

Tính

a) C = $\frac{101+100+99+98+\ldots+3+2+1}{101-100+99-98+\ldots+3-2+1}$

b) D = $\frac{3737.43-4343.37}{2+4+6+\ldots+100}$

Lời giải

$a)\quad C=\frac{101+100+99+98+\ldots+3+2+1}{101-100+99-98+\ldots+3-2+1}$

Ta có:

*) 101 + (100 + 99 + ... + 3 + 2 + 1)

=101 + 101.100 : 2 = 101 + 5050 = 5151

*) 101 - 100 + 99 - 98 + ... + 3 - + 1

= $\underbrace{(101 - 100) + (99 - 98) + ... + (3 - 2)}_{50\ cap}$ + 1 = 50 + 1 = 51

Vậy C = $\frac{5151}{51} = 101$

b) B = $\frac{3737.43 - 4343.37}{2+4+6+...+100}$

Ta có: 3737.43 - 4343.37 = 34.43.101 - 43.101.37 = 0

Vậy B = 0 (vì 2 = 4 + 6 + ...+ 100 ≠ 0)

Bài 25.(Đề thi HSG 6)

Tính tổng S = $\frac{27+4500+135+550.2}{2+4+6+....14+16+18}$

Lời giải

S = $\frac{270.450+270.550}{\frac{(2+18).9}{2}} = \frac{270(450+550)}{90} = \frac{270000}{90} = 3000$

Bài 26.(Đề thi HSG 6 huyện Hương Sơn 2018 - 2019)

Cho tổng gồm 2014 số hạng, $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + ... + \frac{2014}{4^{2014}}$. Chứng minh $S < \frac{1}{2}$

Tìm tất cả các số tự nhiên n, biết rằng $n + S(n) = 2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n

Lời giải

Ta có: $4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + ... + \frac{2014}{4^{2013}}$.

$\Rightarrow 3S = 4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^{2013}} - \frac{2014}{4^{2014}}$

$\Rightarrow 3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^{2013}}. Dat\ M = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^{2013}}$.

$\Rightarrow 4M = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^{2012}}$

Ta có: $3M = 4M - M = 4 - \frac{1}{4^{2013}} < 4 \Rightarrow M < \frac{4}{3}$

Do đó $3S < \frac{4}{3} \Rightarrow S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n \le 999$ và $S(n) \le 27$

Suy ra $n + S(n) \le 999 + 27 = 1026 < 2014 (ktm)$

Mặt khác $n \le n + S(n) = 2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số có 4 chữ số, suy ra $S(n) \le 9.4 = 36$. Do vậy $n \ge 2014 - 36 = 1978$

Vì $1978 \le n \le 2014 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = \overline{19ab} \\ n = \overline{20cd} \end{array}\right.$

*Nếu $n = \overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab} + (1+9+a+b) = 2014$

$\Leftrightarrow 1910 + 11a + 2b = 2014 \Leftrightarrow 11a + 2b = 104 \Rightarrow a \vdots 2$

và $11a = 104 - 2b \ge 104 - 2.9 = 86 \Rightarrow 8 \le 10 < a, a \vdots 2 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow n = 1988(tm)$

*Nếu $n = \overline{20cd} \Rightarrow \overline{20cd} + (2+0+c+d) = 2014$

$\Rightarrow 2002 + 11c + 2d = 2014 \Rightarrow 11c + 2d = 12 \Rightarrow c \vdots 2$

Và $11c \le 12 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \Rightarrow d = 6, n = 2006(tm) \\ c = 1 \Rightarrow 2d = 1(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $n \in \{1988; 2006\}$

Bài 27.(Đề thi HSG 6 huyện Giao Thủy 2018-2019)

a) Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 98.99$

b) Cho biểu thức : $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{100^2}$. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{6} < B < \frac{1}{4}$

Lời giải

a) Ta có: $3A = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + 98.99.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4 + .(5-2) + ... + 98.99.(100-97)$

$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + ... + 98.99.100 - 97.98.99$

$= 98.99.100 \Rightarrow A = 98.33.100 = 323400$

b) Ta có: $B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + ... + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

$B < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$ (1)

$B = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + ... + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + ... + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$

$B > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \Rightarrow B > \frac{1}{6}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Bài 28.(Đề thi HSG 6 huyện Tam Dương 2017-2018)

Tìm hiệu $a - b$, biết rằng: $a = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 98.99$ và $b = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 98^2$

Lời giải

Ta có: $a = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 98.99$

$= 1.(1+1) + 2(1+2) + 3(1+3) + ... + 98.(1+98)$

$= 1 + 1^2 + 2 + 2^2 + 3 + 3^2 + ... + 98 + 98^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 98^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 98)$

$= b + (1 + 2 + 3 + ... + 98)$

$= b + (1+98).98 : 2 = b + 4851$

Vậy $a-b=4851$

Bài 29.(Đề thi HSG 6 huyện Tam Dương 2017-2018)

Cho $A=5+5^2+.....+5^{100}$. Tìm số tự nhiên n, biết rằng: $4.A+5=5^n$

Lời giải

Ta có: $5A=5^2+5^3+....+5^{101}$

$\Rightarrow 5A-A=\left(5^2+5^3+.....+5^{101}\right)-\left(5+5^2+.....+5^{100}\right)=5^{101}-5$

$\Rightarrow 4A+5=5^{101}$

Lại có: $4A+5=5^n \Rightarrow 5^n=5^{101} \Rightarrow n=101$

Bài 30.(Đề thi HSG 6 Trường Nguyễn Chích – Huyện Đông Sơn 2017-2018)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1+2+3+.....+n=\overline{aaa}$

Lời giải

Dãy số $1;2;.....;n$ có n số hạng $\Rightarrow 1+2+....+n=\dfrac{(n+1).n}{2}$

Mà $1+2+3+....+n=\overline{aaa}$

Suy ra $\dfrac{(n+1).n}{2}=\overline{aaa}=a.111=a.3.37 \Rightarrow n(n+1)=2.3.37.a$

Vì tích $n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37 nên $n \vdots 37$ hoặc $n+1 \vdots 37$

Vì số $\dfrac{(n+1)n}{2}$ có 3 chữ số $\Rightarrow n+1<74 \Rightarrow n=37$ hoặc $n+1=37$

Với $n=37$ thì $\dfrac{37.38}{2}=703$ (loại)

Với $n+1=37 \Rightarrow \dfrac{36.37}{2}=666$ (thỏa mãn)

Vậy $n=6,\ a=6$. Ta có: $1+2+3+....+36=666$

Bài 31.(Đề thi HSG 6)

Cho $A=5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+.....+5^6-5^4+5^2-1$

a) Tính A

b) Tìm số tự nhiên n biết $26A+1=5^n$

c) Tìm số dư trong phép chia A cho 100.

Lời giải

$a)A=5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+....+5^6-5^4+5^2-1$

$\Rightarrow 25A=5^2.\left(5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+....+5^6-5^4+5^2-1\right)$

$=5^{52}-5^{50}+5^{48}-5^{46}+.....+5^8-5^6+5^4-5^2$

$\Rightarrow 25A+A=5^{52}-1 \Rightarrow A=\dfrac{5^{52}-1}{26}$

b) Ta có: $26A+1=5^n$ mà $26A=5^{52}-1$ nên $5^{52}-1+1=5^n \Rightarrow n=52$

c) $A=5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+.....+5^6-5^4+5^2-1$ (có 26 số hạng)

$=\left(5^{50}-5^{48}\right)+\left(5^{46}-5^{44}\right)+....+\left(5^{6}-5^{4}\right)+\left(5^{2}-1\right)$

$=5^{48}.\left(5^{2}-1\right)+5^{44}.\left(5^{2}-1\right)+....+5^{4}.\left(5^{2}-1\right)+\left(5^{2}-1\right)$

$=5^{48}.24+5^{44}.24+.....+5^{4}.24+24=5^{46}.25.24+5^{42}.25.24+.....+5^{2}.25.24+24$

$=6.100.\left(5^{46}+5^{42}+.....+5^{2}\right)+24$

Suy ra A chia cho 100 dư 24.

Bài 32.(Đề HSG)

Tìm số tự nhiên x, biết:

$a)1+3+5+7+9+.....+(2x-1)=225$

$b)2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+....+2^{x+2015}=2^{2019}-8$

Lời giải

a) Với mọi $x\in\mathbb{N}$ ta có $2x-1$ là số lẻ

Đặt $A=1+3+5+7+9+.....+(2x-1)\Rightarrow A$ là tổng của các số lẻ liên tiếp từ 1 đến $2x-1$

Số số hạng của A là: $(2x-1-1):2+1=x$ (số hạng)

$\Rightarrow A=\left[(2x-1)+1\right].x:2=x^{2}=225\Rightarrow x=15$

$b)2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+.....+2^{x+15}=2^{2019}-8$

$2^{x}\left(1+2+2^{2}+2^{3}+.....+2^{2015}\right)=2^{3}.\left(2^{2016}-1\right)$

Đặt $M=1+2+2^{2}+2^{3}+.....+2^{2015}$

Ta được: $2M=2+2^{2}+2^{3}+....+2^{2016}\Rightarrow M=2^{2016}-1$

Vậy ta có: $2^{x}.\left(2^{2016}-1\right)=2^{3}.\left(2^{2016}-1\right)\Rightarrow 2^{x}=2^{3}\Rightarrow x=3$

Bài 33.(Đề HSG cấp trường 2018 – 2019)

Hãy chọn kết quả đúng

Tìm x biết rằng: $\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+....+\frac{1}{x.(x+3)}=\frac{1}{6}$

A. $x=27$ B. $x=35$ C. $x=25$ $D.x=205$

Lời giải

Chọn đáp án A

Bài 34.(Đề HSG huyện Gia Viên 2018 – 2019)

Cho $A=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{3}+\left(\frac{3}{2}\right)^{4}+.....+\left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B=\left(\frac{3}{2}\right)^{2013}:2$ Tính $B-A$

Lời giải

Ta có:

$$A=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^4+....+\left(\frac{3}{2}\right)^{2012} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}A=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^4+....+\left(\frac{3}{2}\right)^{2013} \qquad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được:

$$\frac{3}{2}A-A=\left(\frac{3}{2}\right)^{2013}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}A=\left(\frac{3}{2}\right)^{2013}-\frac{5}{4}\Rightarrow A=\frac{3^{2013}}{2^{2012}}+\frac{1}{2}$$

Vậy $B-A=\frac{3^{2013}}{2^{2014}}-\frac{3^{2013}}{2^{2012}}+\frac{5}{2}$

Bài 35.(Đề thi HSG 6 THCS Nguyễn Khuyến 2018-2019)

Tính: $\left[92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-....-\frac{92}{100}\right]:\left[\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+.....+\frac{1}{500}\right]$

Lời giải

$$B=\left[92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-.....-\frac{92}{100}\right]:\left[\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+.....+\frac{1}{500}\right]$$

$$B=\frac{\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{2}{10}\right)+.....+\left(1-\frac{92}{100}\right)}{\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+.....+\frac{1}{500}}=\frac{\frac{8}{9}+\frac{8}{10}+.....+\frac{8}{100}}{\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+....+\frac{1}{100}\right)}=8:\frac{1}{5}=40$$

Bài 36. (Đề thi HSG 6 Bắc Ninh 2018-2019)

Cho $A=3.\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$

Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A.

Lời giải

$$A=3\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)=\left(2^2-1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$$

$$=\left(2^4-1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)=\left(2^8-1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)=\left(2^{16}-1\right)\left(2^{16}+1\right)=2^{32}-1$$

Vì 2^{32} tận cùng là 2 nên $A=2^{32}-1$ tận cùng là 1.

Bài 37. (Đề thi HSG 6 huyện Thạch Thành 2018-2019)

Cho $A=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+....+\frac{1}{1+3+5+7+...+2017}$.

Chứng minh $A<\frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+....+\frac{1}{1+3+5+7+...+2017}$

$$A=\frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}}+.....+\frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$$

$$=\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.6}+\frac{2}{4.8}+.....+\frac{2}{1009.2018}=\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+....+\frac{1}{1009.1009}$$

$$A<\frac{1}{2.2}+\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{1008.1009}\right)$$

$$A<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{1008}-\frac{1}{1009}\right)$$

$$A<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1009}\right)\Rightarrow A<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Rightarrow A<\frac{3}{4}$$

Bài 38. (Đề thi HSG 6 huyện Việt Yên 2019-2020)

Cho $S=1-3+3^2-3^3+.....+3^{98}-3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S, từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1

Lời giải

a) Tổng S có 100 số hạng chia thành 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng

$$S=1-3+3^2-3^3+.....+3^{98}-3^{99}$$

$$=\left(1+3+3^2-3^3\right)+\left(3^4-3^5+3^6-3^7\right)+.....+\left(3^{96}-3^{97}+3^{98}-3^{99}\right)$$

$$=(-20)+3^4.(-20)+.....+3^{96}.(-20)\Rightarrow S\vdots -20$$

$b)$ $S=1-3+3^2-3^3+.....+3^{98}-3^{99}$

$$3S=3-3^2+3^3-3^4+.....+3^{99}-3^{100}\Rightarrow 3S+S=4S=\frac{1-3^{100}}{4}$$

$\Rightarrow 3^{100}-1\vdots 4\Rightarrow 3^{100}$ chia cho 4 dư 1.

Bài 39. (Đề thi HSG 6 huyện Vũ Thư 2018-2019)

Tính giá trị của các biểu thức sau:

1) $-1-2+3+4-5-6+7+8-.....-2013-2014+2015+2016$

2) $B=\left(\frac{1}{2}-1\right):\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(\frac{1}{4}-1\right):\left(\frac{1}{5}-1\right):.....:\left(\frac{1}{98}-1\right):\left(\frac{1}{99}-1\right):\left(\frac{1}{100}-1\right)$

Lời giải

1) $A=-1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+.....-2013-2014+2015+2016$

$$=(-1-2+3+4)+(-5-6+7+8)+(-9-10+11+12)+...$$
$$+(-2013-2014+2015+2016)$$

Ta có tổng A có 2016 số hạng nên có $2016:4=504$ nhóm

$A=4+4+4+.....+4$ (tổng có 504 số 4)

$A=4.504=2016$

$$2)B=\left(\frac{1}{2}-1\right):\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(\frac{1}{4}-1\right):\left(\frac{1}{5}-1\right):.....:\left(\frac{1}{98}-1\right):\left(\frac{1}{99}-1\right):\left(\frac{1}{100}-1\right)$$

$$B=\left(-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{3}{4}\right):.....:\left(\frac{-98}{99}\right):\left(\frac{-99}{100}\right)$$

$$B=\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right).....\left(\frac{-99}{98}\right).\left(-\frac{100}{99}\right)$$

Ta thấy tích B có 99 thừa số âm nên mang dấu âm

$$B=-\frac{1.3.4.5.6.....98.99.100}{2.2.3.4.5.....97.98.99}=\frac{-100}{2.2}=-25$$

Bài 40. (Đề thi HSG 6 huyện Vũ Thư 2018-2019)

Cho $E=\frac{1}{1.101}+\frac{1}{2.102}+\frac{1}{3.103}+.....+\frac{1}{10.110}$

Và $F=\frac{1}{1.11}+\frac{1}{2.12}+\frac{1}{3.13}+.....+\frac{1}{100.110}$. Tính tỉ số $\frac{E}{F}$

Lời giải

Ta có:

$$E=\frac{1}{1.101}+\frac{1}{2.102}+.....+\frac{1}{10.110}=\frac{1}{100}.\left(\frac{100}{1.10}+\frac{100}{2.102}+.....+\frac{100}{10.110}\right)$$

$$=\frac{1}{100}.\left(1-\frac{1}{101}+\frac{1}{2}-\frac{1}{102}+.....+\frac{1}{10}-\frac{1}{110}\right)$$

$$=\frac{1}{100}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+.....+\frac{1}{110}\right)\right]$$

$$F=\frac{1}{1.11}+\frac{1}{2.12}+.....+\frac{1}{100.110}=\frac{1}{10}.\left(\frac{10}{1.11}+\frac{10}{2.12}+.....+\frac{10}{100.110}\right)$$

$$=\frac{1}{10}.\left(1-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+....+\frac{1}{100}-\frac{1}{110}\right)$$

$$=\frac{1}{10}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+.....+\frac{1}{110}\right)\right]$$

$$F=\frac{1}{10}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+.....+\frac{1}{110}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{E}{F}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}$$

Bài 41.(Đề thi HSG 6 huyện Vũ Thư 2018-2019)

Cho biểu thức $D=\frac{(2!)^2}{1^2}+\frac{(2!)^2}{3^2}+\frac{(2!)^2}{5^2}+\frac{(2!)^2}{7^2}+.....+\frac{(2!)^2}{2015^2}$

So sánh D với 6. Biết $n!=1.2.3....n\left(n\in\mathbb{N}\right)$

Lời giải

Ta có:

$$D=\frac{(2!)^2}{1^2}+\frac{(2!)^2}{3^2}+\frac{(2!)^2}{5^2}+\frac{(2!)^2}{7^2}+.....+\frac{(2!)^2}{2015^2}$$

$$D=\frac{2^2}{1^2}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2}{5^2}+\frac{2^2}{7^2}+.....+\frac{2^2}{2015^2}=4+2.\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7^2}+.....+\frac{2}{2015^2}\right)$$

$$D<4+2.\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+.....+\frac{2}{2013.2015}\right)$$

$$=4+2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}\right)$$

$$=4+2\left(1-\frac{1}{2015}\right)=4+2-\frac{2}{2015}<6\Rightarrow D<6$$

Bài 42.(Đề thi HSG 6 THCS Tiền Hải 2015-2016)

Tính giá trị biểu thức $A=\frac{1+3+5+....+19}{21+23+25+....+39}$

Lời giải

Ta có:

$$+)1+3+5+....+19=(1+19)+(3+17)+.....+(9+11)$$
$$=20+20+...+20=100$$
$$+)21+23+25+....+39=(21+39)+(23+27)+...+(29+31)$$
$$=60+60+...+60=300$$
$$\Rightarrow A=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$$

Bài 43.(Đề thi HSG 6 huyện Thanh Chương 2019-2020)

Tính: $A=\frac{1}{4.9}+\frac{1}{9.14}+\frac{1}{14.19}+.....+\frac{1}{64.69}$

Lời giải

$$A=\frac{1}{4.9}+\frac{1}{9.14}+\frac{1}{14.19}+.....+\frac{1}{64.69}=\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{14}+....+\frac{1}{64}-\frac{1}{69}\right)$$

$$=\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{69}\right)=\frac{13}{4.69}$$

Bài 44.(Đề thi HSG 6 huyện Bá Thước 2018 -2019)

Cho $A=1-2+3-4+...+99-100$

a) Tính A

b) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?

c) A có bao nhiêu ước tự nhiên ? Bao nhiêu ước nguyên ?

Lời giải

a) $A=-50$

b) $A\vdots 2\, cho\, 5, A$ không chia hết cho 3

c) A có 6 ước tự nhiên và có 12 ước nguyên.

Bài 45. (Đề thi HSG 6 THCS Tân Lập 2018-2019)

a) Cho $A=4+2^2+2^3+2^4+.....+2^{20}$. Hỏi A có chia hết cho 128 không ?

b) Cho $A=3+3^2+3^3+.....+3^{2009}$. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A+3=3^n$

Lời giải

$a)\, 2A-A=2^{21}\vdots 2^7 \Rightarrow A\vdots 128$

b) Tìm được $n=2010$

Bài 46. (Đề thi HSG 6 THCS Hà Huy Tập)

Thực hiện các phép tính

$1-2+3-4+5-6+7-8+....+2013-2014+2015$

Lời giải

$1-2+3-4+5-6+7-8+.....+2013-2014+2015$

$=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+.....+(-1)+2015$

$=(-1).1007+2015=1008$

Bài 47. (Đề thi HSG 6 THCS Hà Huy Tập)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+.....+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{4}$

Lời giải

$\frac{1}{(2.2)^2}+\frac{1}{(2.3)^2}+\frac{1}{(2.4)^2}+.....+\frac{1}{(2n)^2}$

$=\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+.....+\frac{1}{(n-1).n}\right)$

$=\frac{1}{4}.\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}$

Bài 48.(Đề thi HSG 6 2018 - 2019)

Chứng minh: Với $k\in\mathbb{N}^*$ ta luôn có: $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)$

Áp dụng tính tổng: $S=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)$

Lời giải

Biến đổi:

$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=k(k+1)\left[(k+2)-(k-1)\right]=3k(k+1)$

Áp dụng tính:

$3.(1.2)=1.2.3-0.1.2$

$3.(2.3)=2.3.4-1.2.3$

$3.(3.4)=3.4.5-2.3.4$

.....

$3n(n+1)=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$

Cộng lại ta có:

$3S=n(n+1)(n+2)\Rightarrow S=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Bài 49.(Đề thi HSG6 huyện 2019 - 2020)

Cho $A=3^1+3^2+3^3+.....+3^{2006}$

Thu gọn A

Tìm x để $2A+3=3^x$

Lời giải

$a)A=3^1+3^2+3^3+.....+3^{2006}\Rightarrow 3A=3^2+3^3+3^4+.....+3^{2007}$

$\Rightarrow 3A-A=3^{2007}-3\Rightarrow A=\dfrac{3^{2007}-3}{2}$

b) Ta có: $2.\dfrac{3^{2007}-3}{2}+3=3^x\Rightarrow 3^{2007}-3+3=3^x\Rightarrow 3^{2007}=3^x\Rightarrow x=2007$

Bài 50.(Đề thi HSG huyện 2019 - 2020)

a) Chứng minh rằng: $C=2+2^2+2^3+.....+2^{99}+2^{100}$ chia hết cho 31

b) Tính tổng C. Tìm x để : $2^{2x-1}-2=C$

Lời giải

$a)C=2+2^2+2^3+.....+2^{99}+2^{100}$

$=2.(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^6.(1+2+2^2+2^3+2^4)+.....+2^{96}.(1+2+2^2+2^3+2^4)$

$=31.(2+2^6+.....+2^{96})\vdots 31$

$b)C=2+2^2+2^3+....+2^{99}+2^{100}$

$\Rightarrow 2C=2^2+2^3+....+2^{99}+2^{100}+2^{101}$

$\Rightarrow C+2=2^{101}$

$\Rightarrow 2^{101}=2^{2x-1}$

$\Rightarrow 2x-1=101$

$\Rightarrow x=51$

Bài 51.(Đề thi HSG 6 huyện 2018 -2029)

Thực hiện tính:

$a)\ A=1+\dfrac{1}{2}(1+2)+\dfrac{1}{3}(1+2+3)+.....+\dfrac{1}{2013}.(1+2+....+2013)$

$b)\ B=\dfrac{1-3}{1.3}+\dfrac{2-4}{2.4}+\dfrac{3-5}{3.5}+\dfrac{4-6}{4.6}+....+\dfrac{2011-2013}{2011.2013}+\dfrac{2012-2014}{2012.2014}-\dfrac{2013.2014}{2013.2014}$

Lời giải

$1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\Rightarrow A=1+\frac{1}{2}.\frac{2.3}{2}+\frac{1}{3}.\frac{3.4}{2}+.....+\frac{1}{2013}.\frac{2013.2014}{2}=1+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+.....+\frac{2014}{2}$

$A+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+.....+\frac{2014}{2}=\frac{1}{2}.(1+2+3+.....+2014)$

$A=\frac{1}{2}.(1+2+3+.....+2014)-\frac{1}{2}=1014552$

$B=-2\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+....+\frac{1}{2011.2013}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+.....+\frac{1}{2012.2014}\right)-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$

Thấy :

$\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right);\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right);.....;\frac{1}{2011.2013}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}\right)$

$\frac{1}{2.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right);\frac{1}{4.6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right);.....;\frac{1}{2012.2014}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014}\right)$

$\Rightarrow B=-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014}\right)-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$

$B=-\frac{3}{2}$

Bài 52.(Đề thi HSG 6 huyện 2016 - 2017)

Cho $S=5+5^2+5^3+.....+5^{2006}$

a) Tính S

b) Chứng minh S chia hết cho 126

Lời giải

a) Ta có:

$5S=5^2+5^3+.....+5^{2007}$

$\Rightarrow 5S-S=5^{2007}-5\Rightarrow S=\frac{5^{2007}-5}{4}$

b) $S=(5+5^4)+(5^2+5^5)+(5^3+5^6)+.....+(5^{2003}+5^{2006})$

Biến đổi được: $S=126.(5+5^2+5^3+.....+5^{2003})\vdots 126$

Bài 53.(Đề thi HSG 6 huyện Việt Yên 2019-2020)

Tính:

$a)A=1+2-3-4+5+6-7-8+9+.....+2013+2014-2015-2016$

$b)B=\frac{2.4.10+4.6.8+14.16.20}{3.6.15+6.9.12+21.24.30}$

Lời giải

$a)A=1+2-3-4+5+6-7-8+9+....+2013+2014-2015-2016$

Tính được số số hạng của A là: $(2016-1):1+1=2016$ (số hạng)

Nhóm 4 số hạng liên tiếp vào 1 nhóm:

$A=(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+....+(2013+2014-2015-2016)$

$=\underbrace{-4+(-4)+.....+(-4)}_{co\,504\,so}=-4.504=-2016$

Vậy $A=-2016$

$b)B=\dfrac{2.4.10+4.6.8+14.16.20}{3.6.5+6.9.12+21.24.30}=\dfrac{8.(1.2.5+2.3.4+7.8.10)}{27.(1.2.5+2.3.4+7.8.10)}=\dfrac{8}{27}$

Vậy $B=\dfrac{8}{27}$

Bài 54.(Đề thi HSG 6 THCS Tam Hưng 2019-2020)

Cho $A=1-5+9-13+17-21+....$ Biết $A=2013.$ Hỏi A có bao nhiêu số hạng? Giá trị của số hạng cuối cùng là bao nhiêu ?

Lời giải

Số số hạng của A là $\left[(2013-1):4\right].2+1=1007$ (số hạng)

Số hạng cuối cùng là: $(1007-1).4+1=4025$

Bài 55.(Đề thi HSG 6 THCS Duy Phú 2018-2019)

Tính tổng: $S=\dfrac{2}{1.2}+\dfrac{2}{2.3}+\dfrac{2}{3.4}+.....+\dfrac{2}{99.100}$

Lời giải

$S=\dfrac{2}{1.2}+\dfrac{2}{2.3}+\dfrac{2}{3.4}+.....+\dfrac{2}{98.99}+\dfrac{2}{99.100}$

$=2.\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+.....+\dfrac{1}{98.99}+\dfrac{1}{99.100}\right)$

$=2.\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}\right)$

$=2.\left(1-\dfrac{1}{100}\right)=2.\dfrac{99}{100}=\dfrac{99}{50}$

Bài 56.(Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên 2017-2018)

Tính tổng $S=1^2+2^2+3^2+.....+100^2$

Lời giải

$S=1+2(1+1)+3(2+1)+4(3+1)+....+100.(99+1)$

$=1+1.2+2+2.3+3+3.4+....+99.100+100$

$=(1.2+2.3+....+99.100)+(1+2+3+.....+100)$

Đặt $M=1.2+2.3+3.4+.....+99.100$

$3M=1.2.3+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+.....+99.100.(101-98)$

$3M=99.100.101\Rightarrow M=333300$

$\Rightarrow A=333300+5050=338350$

Bài 57.(Đề thi HSG 6)

Tính tổng $S=1.2+2.3+3.4+.....+99.100$

Lời giải

$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 99.100$

$3S = (1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 99.100).3$

$= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + 99.100.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + 99.100.(101-98)$

$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - .... - 98.99.100 + 99.100.101$

Bài 58.(Đề thi HSG 6 huyện Thanh Nam 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} + ... + \frac{1}{10000} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} + ... + \frac{1}{10000}$

$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + ... + \frac{1}{100^2}$

$= \frac{1}{4}.\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{50^2}\right)$

Do $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{50^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2499} - \frac{1}{2500}$

$= 1 - \frac{1}{2500} < 1$

$\Rightarrow S < \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}$

Bài 59.(Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên 2017-2018)

Tính nhanh

$C = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + ... + \frac{1}{120}$

Lời giải

$C = \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + ... + \frac{2}{240}$

$= 2.\left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{15.16}\right)$

$= 2.\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$

Bài 60.(Đề thi HSG 6 huyện Bá Thước 2018 - 2019)

Cho $A = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100$

a) Tính A

b) A có chia hết cho 2, cho 3, cho 5 không ?

c) A có bao nhiêu ước tự nhiên ? Bao nhiêu ước nguyên ?

Lời giải

a) $A=-50$

b) $A\vdots 2\, cho\, 5, A$ không chia hết cho 3

c) A có 6 ước tự nhiên và có 12 ước nguyên.

Bài 61.(Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên 2018 - 2019)

Tính tổng $S=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+.....+\frac{2}{98.99}+\frac{2}{99.100}$

Lời giải

$$S=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+.....+\frac{2}{98.99}+\frac{2}{99.100}$$

$$=2.\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}\right)$$

$$=2.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=2.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{100}\right)=2.\frac{99}{100}=\frac{99}{50}$$

Bài 62.(Đề thi HSG 6 huyện Hòa An 2018 - 2019)

Cho $S=5+5^2+5^3+5^4+.....+5^{2004}$.

Chứng minh S chia hết cho 126 và chi hết cho 65.

Lời giải

Có $5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6=5\left(1+5^3\right)+5^2.\left(1+5^3\right)+5^3\left(1+5^3\right)$

$=5.126+5^2.126+5^3.126$

$\Rightarrow 5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6$ chia hết cho 126

$S=\left(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6\right)+5^6\left(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6\right)+.....+$

$+5^{1998}\left(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6\right)$

Tổng trên có $2004:6=334$ số hạng chia hết cho 126 nên nó chia hết cho 126.

Có: $5+5^2+5^3+5^4=5+5^3+5\left(5+5^3\right)=130+5.130$

$\Rightarrow 5+5^2+5^3+5^4$ chia hết cho 130

$S=5+5^2+5^3+5^4+5^4\left(5+5^2+5^3+5^4\right)+.....+5^{2000}.\left(5+5^2+5^3+5^4\right)$

Tổng trên có $2004:4=501$ số hạng chia hết cho 130 nên nó chia hết cho 130.

Có S chia hết cho 130 nên chia hết cho 65

Bài 63.(Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên)

1. Cho $S=1+3+3^2+3^3+.....+3^{48}+3^{49}$

a) Chứng tỏ S chia hết cho 4

b) Tìm chữ số tận cùng của S

c) Chứng tỏ $S=\frac{3^{50}-1}{2}$

2. Cho $C=1.2+2.3+3.4+.....+99.100$

a) Tính giá trị của biểu thức C

b) Dùng kết quả câu a, tính giá trị của biểu thức $D=2^2+4^2+6^2+.....+98^2$

Lời giải

1. Ta có:

$$S=(1+3)+(3^2+3^3)+.....+(3^{48}+3^{49})$$
$$=4+3^2.(1+3)+.....+3^{48}.(1+3)$$
$$=4.(1+3^2+.....+3^{48})\vdots 4$$
$$b)S=(1+3+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6+3^7)+....+3^{48}+3^{49}$$

Các tổng có 4 số hạng đều chia hết cho 10, do đó có tận cùng bằng 0

Mặt khác $3^{48}+3^{49}=3^{4.12}+3^{48}.3=.....1+.....1.3=.....4$

Vậy S có chữ số tận cùng bằng 4

$$c)S=1+3+3^2+3^3+.....+3^{48}+3^{49}$$
$$3S=3+3^2+3^3+.....+3^{48}+3^{49}+3^{50}$$
$$3S-S=3^{50}-1$$
$$2S=3^{50}-1\Rightarrow S=\frac{3^{50}-1}{2}$$

2.

$$a)C=1.2+2.3+3.4+....+99.100$$
$$3C=3.1.2+3.2.3+....+3.99.100$$
$$=(1.2.3-0.1.2)+(2.3.4-1.2.3)+....+(99.100.101-98.99.100)$$
$$=99.100.101$$
$$\Rightarrow C=99.100.101:3=36300$$
$$b)C=1.2+2.3+3.4+....+99.100$$
$$=(1.2+2.3)+(3.4+4.5)+.....+(97.98+98.99)+99.100$$
$$=(1+3).2+(3+5).4+.....+(97+99).98+99.100$$
$$=2.2.2+2.4.4+.....+2.98.98+9900$$
$$=2(2^2+4^2+.....+96^2+98^2)+9900$$
$$\Rightarrow(2^2+4^2+.....+96^2+98^2)=C-9900=36300-9900=26400$$
$$\Rightarrow 2^2+4^2+.....+96^2+98^2=13200$$

Bài 64.(Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên)

Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+.....\frac{1}{2352}+\frac{1}{2450}$$

$$C=4+2^2+2^3+....+2^{20}$$

Lời giải

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+.....+\frac{1}{2352}+\frac{1}{2450}$$
$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{48.49}+\frac{1}{49.50}$$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{48}-\frac{1}{49}+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$

$=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$

$C=4+2^2+2^3+....+2^{20}$

$2C=8+2^3+2^4+.....+2^{21}$

$2C-C=2^{21}\Rightarrow C=2^{21}$

Bài 65.(Đề thi HSG 6 huyện Thủy Nguyên)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$

Lời giải

Đặt $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow A+2A=1-\frac{1}{2^6}\Rightarrow 3A=\frac{2^6-1}{2^6}<1\Rightarrow A<\frac{1}{3}$ (ĐPCM)

$S=99.11.101:3=33.100.101$

Bài 66. (Đề thi HSG 6 huyện Thuỷ Nguyên 2019-2020)

a) Cho $a,b\in\mathbb{N}$ nếu $7a+3b\vdots 23$ thì $4a+5b\vdots 23$, điều ngược lại có đúng không

b) Cho $S=3+3^2+3^3+.....+3^{1997}+3^{1998}$

Chứng minh rằng: $S\vdots 26$

Lời giải

a) Vì $6.(7a+3b)+(4a+5b)=46a+23b=23(2a+b)\vdots 23$

Do đó:

Nếu $(7a+3b)\vdots 23\Rightarrow 4a+5b\vdots 23$

Nếu $4a+5b\vdots 23\Rightarrow 7a+3b\vdots 23$

$b)S=(3+3^2)+(3^2+3^4)+.....+(3^{1997}+3^{1998})$

$=12.(1+3^2+3^4+.....+3^{1996})\vdots 2$

$S=(3+3^2+3^3)+.....+(3^{1996}+3^{1997}+3^{1998})$

$=39.(1+.....+3^{1995})\vdots 13$

Vì $26=13.2$ và $(2;13)=1\Rightarrow S\vdots 26$

Bài 67. (Đề thi HSG 6 huyện Thuỷ Nguyên 2015-2016)

Thực hiện phép tính (tính nhanh nếu có thể)

$B=\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+\frac{2}{99}+.....+\frac{2}{899}$

$C=1.2+2.3+...+99.100$

Lời giải

$$B=\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+.....+\frac{2}{29.31}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.....+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}=\frac{1}{3}-\frac{1}{31}=\frac{28}{93}$$

$$3C=1.2.3+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+....+99.100.(101-98)$$

$$=1.2.3+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+.....+99.100.101-98.99.100$$

$$=99.100.101\Rightarrow C=\frac{99.100.101}{3}=333300$$

Bài 68. (Đề thi HSG 6 huyện Thuỷ Nguyên 2015-2016)

Chứng minh rằng $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}<1$

Lời giải

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+.....+\frac{1}{2011.2012}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2012}=\frac{2011}{2012}<1$$

Bài 69. (Đề thi Olympic Toán 6 2017-2018)

Tính $A=\left(1-\frac{1}{4}\right).\left(1-\frac{1}{9}\right).\left(1-\frac{1}{16}\right).\left(1-\frac{1}{25}\right).....\left(1-\frac{1}{196}\right).\left(1-\frac{1}{225}\right)$

Lời giải

$$A=\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}.\frac{24}{25}.....\frac{195}{196}.\frac{224}{225}=\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}.\frac{4.6}{5.5}.....\frac{13.15}{14.14}.\frac{14.16}{15.15}$$

$$=\frac{(1.2.3.4.....13.14).(3.4.5.6.....15.16)}{(2.3.4.....14.15).(2.3.4.....15)}=\frac{16}{15.2}=\frac{8}{15}$$

Bài 70. (Đề thi Olympic Toán 6 2017-2018)

a) Cho $S=2010+2010^2+2010^3+....+2010^{2009}+2010^{2010}$

Chứng tỏ rằng S chia hết cho 2011

b) Tìm kết quả của phép nhân:

$$B=\underbrace{33..33}_{20\,chu\,so}\times\underbrace{999...9}_{20\,chu\,so}$$

Lời giải

a) Ta có: $S=2010+2010^2+2010^3+2010^4+.....+2010^9+2010^{10}$

$$=2010(1+2010)+2010^3(1+2010)+.....+2010^{2009}.(1+2010)$$

$$=2010.2011+2010^3.2011+....+2010^{2009}.2011$$

$$=2011.\left(2010+2010^3+.....+2010^{2009}\right)\vdots 2011$$

$$b)B=\underbrace{333.....3}_{20\,chu\,so}.\underbrace{999.....9}_{20\,chu\,so}=\underbrace{333.....3}_{20\,chu\,so}.\left(10^{21}-1\right)$$

$$=\underbrace{333.....3}_{20\,chu\,so}.10^{20}-\underbrace{333.....3}_{20\,chu\,so}=\underbrace{33333....3}_{20\,chu\,so}\underbrace{00000...0}_{20\,chu\,so}-\underbrace{333.....3}_{20\,chu\,so}=\underbrace{333.....3}_{20\,chu\,so}\underbrace{2666.....67}_{19\,chu\,so\,6}$$

Bài 71. (Đề thi HSG 6 huyện Đức Phổ 2018-2019)

Tính: $A=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+.....+\frac{1}{120}$

Lời giải

$$A=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+....+\frac{1}{120}=\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.3}+.....+\frac{1}{15.7}+\frac{1}{15.8}$$

$$=\left(\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.3}\right)+.....+\left(\frac{1}{15.7}+\frac{1}{15.8}\right)=\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+.....+\frac{1}{15}.\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+.....+\frac{1}{56}=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{7.8}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

Bài 72. (Đề thi HSG 6 Trường THCS Nguyễn Khuyến 2017-2018)

a) Chứng minh rằng: $M=\left(2012+2012^2+2012^3+.....+2012^{2010}\right)\vdots 2013$

b) Cho $A=\frac{4}{7.31}+\frac{6}{7.41}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57};B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}$

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$a)M=2012+2012^2+2012^3+....+2012^{2010}$$

$$=\left(2012+2012^2\right)+\left(2012^3+2012^4\right)+.....+\left(2012^{2009}+2012^{2010}\right)$$

$$=2012(1+2012)+2012^3.(1+2012)+.....+2012^{2009}(1+2012)$$

$$=2013.\left(2012+2012^3+.....+2012^{2009}\right)\vdots 2013\Rightarrow M\vdots 2013$$

$$b)A=\frac{4}{7.31}+\frac{6}{7.41}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57}$$

Nên $\frac{1}{5}A=\frac{4}{35.31}+\frac{6}{35.41}+\frac{9}{50.41}+\frac{7}{50.57}$

$$=\frac{1}{31}-\frac{1}{35}+\frac{1}{35}-\frac{1}{41}+\frac{1}{41}-\frac{1}{50}+\frac{1}{50}-\frac{1}{57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}=\frac{26}{1767}$$

$$B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}$$

Nên $\frac{1}{2}B=\frac{7}{38.31}+\frac{5}{38.43}+\frac{3}{46.43}+\frac{11}{46.57}$

$=\frac{1}{31}-\frac{1}{38}+\frac{1}{38}-\frac{1}{43}+\frac{1}{43}-\frac{1}{46}+\frac{1}{46}-\frac{1}{57}=\frac{1}{31}-\frac{1}{57}$

Do đó $\frac{1}{5}A=\frac{1}{2}B\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{5}{2}$

Bài 73. (Đề thi HSG 6 Năm 2019-2020)

Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lý:

a) $1.2.3...9-1.2.3....8-1.2.3....7.8^2$

b) $13-12+11+10-9+8-7-6+5-4+3+2-1$

Lời giải

$a)\ 1.2.3....9-1.2.3...7.8-1.2.3...7.8^2=1.2.3...7.8.(9-1-8)=1.2.3...7.8...\times 0=0$

$b)\ 13-12+11+10-9+8-7-6+5-4+3+2-1$

$=13-(12-11-10+9)+(8-7-6+5)-(4-3-2-1)=13$

Bài 74. (Đề thi HSG 6 Huyện Lương Tài 2015-2016)

M có là một số chính phương không , nếu:

$M=1+3+5+.....+(2n-1)$ (với $n\in\mathbb{N},n\neq 0$)

Lời giải

$M=1+3+5+...+(2n-1)(n\in\mathbb{N},n\neq 0)$

Tính số số hạng: $(2n-1-1):2+1=n$

Tính tổng: $=(2n-1+1).n:2=2n^2:2=n^2$

Vậy M là số chính phương.

Bài 75. (Đề thi HSG 6 cấp trường năm học 2018 - 2019)

Tính giá trị của biểu thức $A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+.....+\frac{1}{120}$

Lời giải

$\frac{1}{2}A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{15.16}\Rightarrow\frac{1}{2}A=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\Rightarrow A=\frac{15}{8}$

Bài 76.(Đề HSG Toán 6 huyện Tam Đảo 2019-2020)

Cho dãy số $6;7;9;12;16;....$ Hỏi số hạng thứ 61 của dãy là số nào ?

Lời giải

Ta có:

$6=6$

$7=6+1$

$9=6+(1+2)$

$12=6+(1+2+3)$

$16=6+(1+2+3+4)$

Do đó số hạng thứ 61 là: $6+(1+2+3+.....+60)=1836$

Bài 77.(Đề HSG Toán 6 huyện Thanh Oai)

Cho $S=1-3+3^2-3^3+.....+3^{98}-3^{99}$

a) Chứng minh rằng S là bội của -20

b) Tính S, từ đó suy ra 3^{100} chia cho 4 dư 1.

Lời giải

$a)S=1-3+3^2-3^3+.....+3^{98}-3^{99}$

$=(1-3+3^2-3^3)+(3^4-3^5+3^6-3^7)+.....+(3^{96}-3^{97}+3^{98}-3^{99})$

$=(-20)+3^4.(-20)+.....+3^{96}.(-20)\vdots -20$

$\Rightarrow S\vdots -20$

$b)S=1-3+3^2-3^3+.....+3^{98}-3^{99}$

$3S=3-3^2+3^3-3^4+.....+3^{99}-3^{100}$

$\Rightarrow 4S=\dfrac{1-3^{100}}{4}$

S là một số nguyên nên $1-3^{100}\vdots 4\Rightarrow 3^{100}-1\vdots 4\Rightarrow 3^{100}$ chia cho 4 dư 1.

Bài 78.(Đề HSG Toán 6 huyện Tam Kỳ)

Cho $A=5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+.....+5^6-5^4+5^2-1$

a) Tính A

b) Tìm số tự nhiên n biết $26A+1=5^n$

c) Tìm số dư trong phép chia A cho 100.

Lời giải

$a)A=5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+....+5^6-5^4+5^2-1$

$\Rightarrow 25A=5^2(5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+....+5^6-5^4+5^2-1)$

$=5^{52}-5^{50}+5^{48}-5^{46}+.....+5^8-5^6+5^4-5^2$

$\Rightarrow 25A+A=5^{52}-1\Rightarrow 26A=5^{52}-1$

$\Rightarrow A=\dfrac{5^{52}-1}{26}$

b) Ta có: $26A+1=5^n$ mà $26A=5^{52}-1$ nên $5^{52}-1+1=5^n\Rightarrow n=52$

c) Ta có:

$A=5^{50}-5^{48}+5^{46}-5^{44}+....+5^6-5^4+5^2-1$(có 26 số hạng)

$=(5^{50}-5^{48})+(5^{46}-5^{44})+....+(5^6-5^4)+5^2-1$

$=(5^{50}-5^{48})+(5^{46}-5^{44})+....+(5^6-5^4)+(5^2-1)$

$=5^{48}.(5^2-1)+5^{44}.(5^2-1)+.....+5^4.(5^2-1)+(5^2-1)$

$=5^{48}.24+5^{44}.24+.....+5^4.24+24$

$=5^{46}.25.24+5^{42}.25.24+.....+5^2.25.24+24$

$=5^{46}.600+5^{42}.600+.....+5^2.600+24=6.100.(5^{46}+5^{42}+.....+5^2)+24$

Suy ra A chia cho 100 dư 24.

Bài 79.(Đề HSG Toán 6 huyện Giao Thủy 2018 - 2019)

1. Tính tổng : $A=1.2+2.3+3.4+....+98.99$

2. Cho biểu thức $B=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+.....+\frac{1}{100^2}$

Chứng tỏ rằng $\frac{1}{6}<B<\frac{1}{4}$

Lời giải

1)$3A=1.2.3+2.3.3+3.4.3+.....+98.99.3$

$=1.2.3+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+.....+98.99.(100-97)$

$=1.2.3+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+.....+98.99.100-97.98.99$

$=98.99.100\Rightarrow A=98.99.100:3=323400$

2. $B=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+.....+\frac{1}{100^2}$

$\Rightarrow B<\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+.....+\frac{1}{99.100}$

$B<\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$B<\frac{1}{4}-\frac{1}{100}<\frac{1}{4}(1)$

$B>\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+....+\frac{1}{100.101}$

$B>\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+....+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$

$B>\frac{1}{5}-\frac{1}{101}=\frac{96}{505}>\frac{96}{576}=\frac{1}{6}\Rightarrow B>\frac{1}{6}(2)$

Từ (1) (2) $\Rightarrow\frac{1}{6}<B<\frac{1}{4}$

Bài 80.(Đề HSG Toán 6 trường)

1) Rút gọn các biểu thức sau:

$M=3-3^2+3^3-3^4+.....+3^{2015}-3^{2016}$

2) Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\frac{3}{4}$

Lời giải

1) $M=3-3^2+3^3-3^4+.....+3^{2015}-3^{2016}$

$3M=3^2-3^3+3^4-.....+3^{2016}-3^{2017}\Rightarrow 3M+M=3-3^{2017}\Rightarrow M=\frac{3-3^{2017}}{4}$

2) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=\frac{3}{4}-\frac{1}{100}<\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\frac{3}{4}$$

Bài 81.(Đề HSG Toán 6 trường)

Cho $A=1+4+4^2+4^3+.....+4^{48}+4^{49}$; $B=4^{100}$

Chứng minh rằng: $A<\frac{B}{3}$

Lời giải

$$4A=4.\left(1+4+4^2+4^3+.....+4^{98}+4^{99}\right)=4+4^2+4^3+.....+4^{99}+4^{100}$$

$$4A-A=4^{100}-1\Rightarrow A=\frac{4^{100}-1}{3}$$

Vì $4^{100}-1<4^{100}\Rightarrow \frac{4^{100}-1}{3}<\frac{4^{100}}{3}\Rightarrow A<\frac{B}{3}$

Bài 82.(Đề thi HSG Toán 6 trường Trần Phú 2018 - 2019)

Cho $M=2+2^2+2^3+2^4+.....+2^{2017}+2^{2018}$

a) Tính M

b) Chứng tỏ rằng M chia hết cho 3

Lời giải

a) Ta có $2M=2^2+2^3+2^4+.....+2^{2018}+2^{2019}$

Lấy $2M-M=2^{2019}-2$. Vậy $M=2^{2019}-2$

$b)\ M=\left(2+2^2\right)+\left(2^3+2^4\right)+\left(2^5+2^6\right)+.....+\left(2^{2017}+2^{2018}\right)$

$M=2(1+2)+2^3.(1+2)+2^5.(1+2)+.....+2^{2017}.(1+2)$

$M=3.\left(2+2^3+2^5+.....+2^{2017}\right)$

Vậy $M\vdots 3$

Bài 83.(Đề thi HSG 6 Liên Châu 2018 – 2019)

Cho tổng $A=1+3^2+3^4+3^6+.....+3^{2006}$. Tính $8A-3^{2008}$

Lời giải

$$3A=3\left(1+3^2+3^4+.....+3^{2006}\right)=3+3^3+3^5+.....+3^{2007}$$

$$3A+A=4A=1+3+3^2+3^3+.....+3^{2006}+3^{2007}$$

$$\Rightarrow 12A=3.\left(1+3+3^2+3^3+.....+3^{2006}+3^{2007}\right)$$

$$=3+3^2+3^3+.....+3^{2006}+3^{2007}+3^{2008}$$

$$12A-4A=8A=3^{2008}-1$$

$\Rightarrow 8A-3^{2008}=3^{2008}-1-3^{2008}=-1$

Bài 84.(Đề thi HSG 6 Huyện Vĩnh Tường 2019 – 2020)

a) Chứng minh rằng: $A=1+2+2^2+.....+2^{2009}\vdots 3$

b) Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chỉ được viết bởi chữ số 2 và chữ số 0 mà số đó chia hết cho 2010

Lời giải

$a)A=1+2+2^2+2^3+....+2^{2009}$

$=(1+2)+2^2(1+2)+.....+2^{2008}.(1+2)\vdots 3$

b) Xét 2011 số: $2;22;222;.....;222....2$ số cuối cùng có 2011 chữ số 2. Các số này khi chia cho 2010 ta được 2011 số dư.Mà một số tự nhiên bất kỳ khi chia cho 2010 chỉ có thể có số dư là: $0;1;2;.....;2009$ có 2010 khả năng dư. Do đó theo nguyên lý Dirichle tồn tại hai số trong các số trên có cùng số dư khi chia cho 2010. Hiệu của chúng có dạng $222...2000....0$ chia hết cho 2010

Bài 85.(Đề thi HSG 6 huyện Vĩnh Tường 2019 – 2020)

Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+.....+\frac{1}{100}\right):\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+.....+\frac{1}{99.100}\right)=1$$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+.....+\frac{1}{99.100}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{100}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{100}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{100}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{50}\right)$$

$$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+.....+\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+.....+\frac{1}{100}\right):\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+.....+\frac{1}{99.100}\right)=1$$

Bài 86.(Đề thi HSG 6 Trường THCS Nghi Phú 2018 – 2019)

a)Tính tổng: $S=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+.....+\frac{2}{99.100}$

b)Chứng minh rằng: $\left(3+3^2+3^3+3^4+.....+3^{100}\right)\vdots 40$

Lời giải

a) $S=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+.....+\frac{2}{98.99}+\frac{2}{99.100}$

$$=2.\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}\right)$$

$$=2.\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}\right)$$

$$=2.\left(1-\frac{1}{100}\right)=2.\frac{99}{100}=\frac{99}{50}$$

b) $A=\left(3+3^2+3^3+3^4+.....+3^{100}\right)$

$=3\ 1+3+3^2+3^3\ +...+3^{97}\ 1+3+3^2+3^3$

$=3.40+...+3^{97}.40\ \vdots\ 40$

$\Rightarrow\left(3+3^2+3^3+3^4+.....+3^{100}\right)\vdots 40$

Bài 87.(Đề thi HSG 6)

Cho $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{308}+\frac{1}{309}$

$B=\frac{308}{1}+\frac{307}{2}+\frac{306}{3}+.....+\frac{3}{306}+\frac{2}{307}+\frac{1}{308}$

Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$B=\frac{308}{1}+\frac{307}{2}+\frac{306}{3}+.....+\frac{3}{306}+\frac{2}{307}+\frac{1}{308}$

$=\left(1+\frac{307}{2}\right)+\left(1+\frac{306}{3}\right)+.....+\left(1+\frac{2}{307}\right)+\left(1+\frac{1}{308}\right)+1$

$=\frac{309}{2}+\frac{309}{3}+\frac{309}{4}+.....+\frac{309}{307}+\frac{309}{308}+\frac{309}{309}$

$=309.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{308}+\frac{1}{309}\right)$

$B=309A$

$\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{1}{309}$

Bài 88.(Đề thi HSG 6 Cấp Trường)

Tìm x biết: $1+5+9+13+17+.....+x=501501$

Lời giải

Ta có: $5=2+3;9=4+5;13=6+7;17=8+9$

Do vậy $x=a+(a+1)(a\in\mathbb{N})$

Nên: $1+5+9+13+16+.....+x=1+2+3+4+5+6+7+.....+a+(a+1)=501501$

Hay $(a+1)(a+1+1):2=501501$

$(a+1)(a+2)=1003002=1001.1002$

$\Rightarrow a=1000\Rightarrow x=1000+(1000+1)=2001$

Bài 89. (Đề thi HSG 6 Cấp Trường 2019- 2020)

Tìm x biết

$x+(x+1)+(x+2)+....+(x+30)=1240$

Lời giải

$x+(x+1)+(x+2)+....+(x+30)=1240$

$\Rightarrow \underbrace{(x+x+x+...+x)}_{31..so...hang..x}+(1+2+....+30)=1240$

$\Rightarrow 31x=1240-31.15$

$\Rightarrow x=\dfrac{775}{31}=25$

Bài 90.(HSG 6 Cấp Trường 2019- 2020)

Cho $S=5+5^2+5^3+5^4+.....+5^{2004}$. Chứng minh S chia hết cho 126 và chi hết cho 65.

Lời giải

Có $5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6=5(1+5^3)+5^2.(1+5^3)+5^3(1+5^3)$

$=5.126+5^2.126+5^3.126$

$\Rightarrow 5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6$ chia hết cho 126

$S=(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6)+5^6(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6)+.....+5^{1998}(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6)$ Tổng trên có $2004:6=334$ số hạng chia hết cho 126 nên nó chia hết cho 126.

Có: $5+5^2+5^3+5^4=5+5^3+5(5+5^3)=130+5.130$

$\Rightarrow 5+5^2+5^3+5^4$ chia hết cho 130

$S=5+5^2+5^3+5^4+5^4(5+5^2+5^3+5^4)+.....+5^{2000}.(5+5^2+5^3+5^4)$

Tổng trên có $2004:4=501$ số hạng chia hết cho 130 nên nó chia hết cho 130.

Có S chia hết cho 130 nên chia hết cho 65

Bài 91.(Đề thi HSG 6 Cấp Trường 2019- 2020)

Tìm số tự nhiên x, biết:

$a)x+(x+1)+(x+2)+....+(x+2010)=2029099$

$b)2+4+6+8+.....+2x=210$

Lời giải

$a)x+(x+1)+(x+2)+....+(x+2010)=2029099$

$\Rightarrow 2011x+1+2+.....+2010=2029099$

$\Rightarrow 2011x+\dfrac{2010.2011}{2}=2029099$

$\Rightarrow 2011x=2029099-\dfrac{2010.2011}{2}$

$\Rightarrow x=\left(2029099-\dfrac{2010.2011}{2}\right):2011=4$

$b)2+4+6+8+.....+2x=210$

$\Rightarrow 2(1+2+3+...+x)=210 \Rightarrow 2.\dfrac{x(x+1)}{2}=210$

$\Rightarrow x(x+1)=210=14.15$

$\Rightarrow x=14$

Bài 92.(Đề thi HSG 6 Cấp Trường 2018- 2019)

Không quy đồng hãy tính hợp lý các tổng sau

$a)A=\frac{-1}{20}+\frac{-1}{30}+\frac{-1}{42}+\frac{-1}{56}+\frac{-1}{72}+\frac{-1}{90}$

$b)B=\frac{5}{2.1}+\frac{4}{1.11}+\frac{3}{11.2}+\frac{1}{2.15}+\frac{13}{15.4}$

Lời giải

$a)A=\frac{-1}{20}+\frac{-1}{30}+\frac{-1}{42}+....+\frac{-1}{90}=-\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+.....+\frac{1}{9.10}\right)$

$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+....+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=-\frac{3}{20}$

$b)B=\frac{5}{2.1}+\frac{4}{1.11}+\frac{3}{11.2}+\frac{1}{2.15}+\frac{13}{15.4}$

$=7.\left(\frac{5}{2.7}+\frac{4}{7.11}+\frac{3}{11.14}+\frac{1}{14.15}+\frac{13}{15.28}\right)=7.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{28}\right)=\frac{13}{4}$

Bài 93.(Đề thi HSG 6 2018-2019)

Cho $A=\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+.....+\frac{n}{5^{n+1}}+.....+\frac{11}{5^{12}}(n\in\mathbb{N})$. Chứng minh $A<\frac{1}{16}$

Lời giải

Xét $5A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+.....+\frac{n}{5^n}+.....\frac{11}{5^{11}}\Rightarrow$

$4A=5A-A=\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+.....+\frac{n}{5^n}+.....\frac{11}{5^{11}}\right)$

$-\left(\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+.....+\frac{n}{5^{n+1}}+.....+\frac{11}{5^{12}}\right)$

$4A=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+.....+\frac{1}{5^n}+....+\frac{1}{5^{11}}-\frac{11}{5^{12}}$

$4A=B-\frac{11}{5^2}\quad vs\ B=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+.....+\frac{1}{5^n}+....+\frac{1}{5^{11}}$

$\Rightarrow 5B=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+.....+\frac{1}{5^{n-1}}+.....+\frac{1}{5^{10}}$

$\Rightarrow 4B=5B-B=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+.....+\frac{1}{5^{n-1}}+.....+\frac{1}{5^{10}}\right)$

$-\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+.....+\frac{1}{5^{n-1}}+.....+\frac{1}{5^{11}}\right)$

$\Rightarrow 4B=1-\frac{1}{5^{11}}\Rightarrow B=\frac{5^{11}-1}{4.5^{11}}$

$\Rightarrow 4A=\frac{5^{11}-1}{4.5^{11}}-\frac{11}{5^{12}}=\frac{5^{12}-49}{4.5^{12}}$

Bài 94.(Đề thi HSG 6 2017-2018)

Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

a) Đặt $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow 2A+A=3A=1-\frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1$

$\Rightarrow 3A<1\Rightarrow A<\frac{1}{3}$

b) Đặt $A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 3A=1-\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{3}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow 4A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 4A<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

Đặt $B=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}\Rightarrow 3B=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

$4B=B+3B=3-\frac{1}{3^{99}}<3\Rightarrow B<\frac{3}{4}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4A<B<\frac{3}{4}\Rightarrow A<\frac{3}{16}$

Bài 95.(Đề thi HSG 6 huyện Việt Yên 2019-2020)

Tìm x biết: $\left(\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+.....+\frac{1}{7.8.9.10}\right).x=\frac{119}{720}$

Lời giải

Ta có:

$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+.....+\frac{1}{7.8.9.10}$

$=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}+....+\frac{1}{7.8.9}-\frac{1}{8.9.10}\right)$

$=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{720}\right)=\frac{1}{3}.\frac{119}{720}$

Nên từ đề suy ra : $\frac{1}{3}.\frac{119}{720}.x=\frac{119}{720}\Rightarrow x=3$

Vậy $x=3$.

Bài 96.(Đề thi HSG 6 THCS Hồng Dương 2019-2020)

Tính giá trị biểu thức $P=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{15}\right)...\left(1-\frac{1}{190}\right)$

Lời giải

$P=\frac{2}{3}.\frac{5}{6}.\frac{9}{10}.\frac{14}{15}.....\frac{189}{190}$, ta tìm quy luật các mẫu: $\frac{2.3}{2};\frac{3.4}{2};\frac{4.5}{2};\frac{5.6}{2};.....;\frac{19.20}{2}$

Thay vào P ta được:

$P=\frac{2.2}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{9.2}{4.5}.\frac{14.2.}{5.6}.....\frac{2.189}{19.20}=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}.\frac{4.7}{5.6}.....\frac{18.21}{19.20}$

$=\frac{1.2.3.4....18.(4.5.6.7...21)}{2.3.4.5....19.(3.4.5.6.....20)}=\frac{1}{19}.\frac{21}{3}=\frac{7}{19}$

Bài 97.(Đề thi HSG 6 THCS Mỹ Hưng 2018-2019)

Cho $S=5+5^2+5^3+5^4+.....+5^{2004}$.

Chứng minh S chia hết cho 126 và chi hết cho 65.

Lời giải

Có $5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6=5(1+5^3)+5^2.(1+5^3)+5^3(1+5^3)$

$=5.126+5^2.126+5^3.126$

$\Rightarrow 5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6$ chia hết cho 126

$S=(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6)+5^6(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6)+.....+$

$+5^{1998}(5+5^2+5^3+5^4+5^5+5^6)$

Tổng trên có $2004:6=334$ số hạng chia hết cho 126 nên nó chia hết cho 126.

Có: $5+5^2+5^3+5^4=5+5^3+5(5+5^3)=130+5.130$

$\Rightarrow 5+5^2+5^3+5^4$ chia hết cho 130

$S=5+5^2+5^3+5^4+5^4(5+5^2+5^3+5^4)+.....+5^{2000}.(5+5^2+5^3+5^4)$

Tổng trên có $2004:4=501$ số hạng chia hết cho 130 nên nó chia hết cho 130.

Có S chia hết cho 130 nên chia hết cho 65

Bài 98.(Đề thi HSG 6 THCS Mỹ Hưng 2018-2019)

Tìm số tự nhiên x, biết:

a) $x+(x+1)+(x+2)+....+(x+2010)=2029099$

b) $2+4+6+8+.....+2x=210$

Lời giải

a) $\Rightarrow 2011x+1+2+.....+2010=2029099$

$\Rightarrow 2011x+\frac{2010.2011}{2}=2029099$

$\Rightarrow 2011x=2029099-\frac{2010.2011}{2}$

$\Rightarrow x=\left(2029099-\frac{2010.2011}{2}\right):2011=4$

b) $\Rightarrow 2(1+2+3+...+x)=210 \Rightarrow 2.\dfrac{x(x+1)}{2}=210$

$\Rightarrow x(x+1)=210=14.15$

$\Rightarrow x=14$

Bài 99.(Đề thi HSG 6)

Cho $C=3+3^2+3^3+3^4+.....+3^{100}$. Chứng tỏ C chia hết cho 40

Lời giải

$C=(3+3^2+3^3+3^4)+.....+(3^{97}+3^{98}+3^{99}+3^{100})$

$=3(1+3+3^2+3^3)+.....+3^{97}.(1+3+3^2+3^3)$

$=40.(3+3^5+3^9+.....+3^{97}) \vdots 40$

Bài 100. (Đề thi HSG 6)

Cho 10 số tự nhiên bất kỳ: $a_1, a_2, ..., a_{10}$.Chứng minh rằng thế nào cũng có một số hoặc một tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy đều chia hết cho 10.

Lời giải

Lập dãy số

Đặt $B_1=a_1$

$B_2=a_1+a_2$

$B_3=a_1+a_2+a_3$

.....

$B_{10}=a_1+a_2+.....+a_{10}$

Nếu tồn tại $B_i\,(i=1,2,3....10)$nào đó chia hết cho 10 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i nào chia hết cho 10 ta làm như sau:

Ta đem B_i chia cho 10 sẽ được 10 số dư (các số dư $\in\{1,2,3,...,9\}$). Theo nguyên tắc Dirichle, phải có ít nhất 2 số dư bằng nhau. Các số B_m-B_n chia hết cho 10$(m>n)$

Bài 101. (Đề thi HSG 6)

Tính nhanh

a) $A=\dfrac{3^2}{1.4}+\dfrac{3^2}{4.7}+\dfrac{3^2}{7.10}+.....+\dfrac{3^2}{97.100}$

b) $B=\dfrac{2}{20}+\dfrac{2}{30}+\dfrac{2}{42}+\dfrac{2}{56}+\dfrac{2}{72}+\dfrac{2}{90}$

Lời giải

a) Ta có:

$$A=\frac{3^2}{1.4}+\frac{3^2}{4.7}+\frac{3^2}{7.10}+.....+\frac{3^2}{97.100}=3.\left(\frac{3}{1.4}+\frac{3}{4.7}+\frac{3}{7.10}+....+\frac{3}{97.100}\right)$$

$$= 3.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+....+\frac{1}{97}-\frac{1}{100}\right)=3.\frac{99}{100}=\frac{297}{100}$$

b) Ta có

$$B=\frac{2}{20}+\frac{2}{30}+\frac{2}{42}+\frac{2}{56}+\frac{2}{72}+\frac{2}{90}=2\cdot\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{9.10}\right)$$

$$=2.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=2.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{10}$$

Bài 102. (Đề thi HSG 6 THCS Hồng Lĩnh 2017-2018)

Tính tổng: $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{100}}$

Lời giải

Ta có: $3A-A=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{3^{99}}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{3^{100}}\right)$

$$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{3^{100}}\Rightarrow A=\frac{3^{100}-1}{2.3^{100}}$$

Bài 103. (Đề thi HSG 6)

Tính:

$$A=\frac{5}{11.16}+\frac{5}{16.21}+....+\frac{5}{61.66}$$

$$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$

$$C=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{1980.1990}+....+\frac{1}{2006.2007}$$

Lời giải

$$A=\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{21}+.....+\frac{1}{61}-\frac{1}{66}=\frac{1}{11}-\frac{1}{66}=\frac{5}{66}$$

$$B=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$C=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{1989}-\frac{1}{1990}+....+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}=1-\frac{1}{2007}=\frac{2006}{2007}$$

Bài 104. (Đề thi HSG 6)

Chứng minh rằng:

$$a)\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$$

$$b)\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$$

Lời giải

a) Đặt $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}$

$\Rightarrow 2A+A=3A=1-\frac{1}{2^6}=\frac{2^6-1}{2^6}<1\Rightarrow 3A<1\Rightarrow A<\frac{1}{3}$

b) Đặt $A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 3A=1-\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{3}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow 4A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 4A<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

Đặt $B=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}\Rightarrow 3B=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

$4B=B+3B=3-\frac{1}{3^{99}}<3\Rightarrow B<\frac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4A<B<\frac{3}{4}\Rightarrow A<\frac{3}{16}$.

Bài 105. (Đề thi HSG 6 huyện Nga Sơn 2018-2019)

a) Cho $A=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{50^2}$. Chứng minh: $A<2$

b) Cho $B=2^1+2^2+2^3+.....+2^{30}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 21.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\cdots\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.....;\frac{1}{50^2}<\frac{1}{49.50}=\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$

Vậy $A=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{50^2}<\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{49.50}$

$=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}=1+1-\frac{1}{50}=\frac{99}{50}<2$

b) $B=2^1+2^2+2^3+.....+2^{30}$

Ta có: $B=2^1+2^2+2^3+.....+2^{30}$

$=\left(2^1+2^2\right)+\left(2^3+2^4\right)+....+\left(2^{29}+2^{30}\right)=2.(1+2)+2^3.(1+2)+.....+2^{29}.(1+2)$

$=3.\left(2+2^3+....+2^{29}\right)\Rightarrow B\vdots 3$ (1)

Ta có: $B=2^1+2^2+2^3+.....+2^{30}$

$=\left(2^1+2^2+2^3\right)+\left(2^4+2^5+2^6\right)+....+\left(2^{28}+2^{29}+2^{30}\right)$

$=2.\left(1+2+2^2\right)+2^4.\left(1+2+2^2\right)+...+2^{28}.\left(1+2+2^2\right)$

$=7.\left(2+2^4+....+2^{28}\right)\Rightarrow B\vdots 7$ (2)

Mà 3 và 7 là hai số nguyên tố cùng nhau. Kết hợp với (1) và (2) suy ra :

$B\vdots 3.7$ hay $B\vdots 21$

Bài 106. (Đề thi HSG 6 cấp trường 2018-2019)

Cho $A=1+4+4^2+4^3+.....+4^{98}+4^{99}, B=4^{100}$

Chứng minh rằng: $A<\frac{B}{3}$.

Lời giải

$4A=4.\left(1+4+4^2+4^3+4^4+.....4^{98}+4^{99}\right)$

$=4+4^2+4^3+4^4+.....4^{98}+4^{99}+4^{100}$

$\Rightarrow 4A-A=4^{100}-1\Rightarrow A=\frac{4^{100}-1}{3}$

Vì $4^{100}-1<4^{100}\Rightarrow \frac{4^{100}-1}{3}<\frac{4^{100}}{3}$

Vậy $A<\frac{B}{3}$

Bài 107. (Đề thi HSG toán 6 cấp trường 2018-2019)

Cho $S=1+3+3^2+3^3+.....+3^{48}+3^{49}$

a) Chứng tỏ S chia hết cho 4

b) Tìm chữ số tận cùng của S

c) Chứng tỏ $S=\frac{3^{50}-1}{2}$

Lời giải

a) Ta có:

$S=(1+3)+\left(3^2+3^3\right)+.....+\left(3^{48}+3^{49}\right)=4+3^2.(3+1)+.....+3^{48}(1+3)$

$=4.\left(1+3^2+.....+3^{48}\right)\vdots 4$

$b)S=\left(1+3+3^2+3^3\right)+\left(3^4+3^5+3^6+3^7\right)+.....+\left(3^{44}+3^{45}+3^{46}+3^{47}\right)+3^{48}+3^{49}$

Các tổng 4 số hạng đều chia hết cho 10, do đó tận cùng bằng 0

Mặt khác: $3^{48}+3^{49}=3^{4.12}+3^{48}.3=....1+....1.3=....4$

Vậy S có tận cùng bằng 4

$c)S=1+3+3^2+.....+3^{48}+3^{49}\Rightarrow 3S=3+3^2+3^3+.....+3^{49}+3^{50}$

$\Rightarrow 3S-S=3^{50}-1\Rightarrow S=\frac{3^{50}-1}{2}$

Bài 108. (Đề thi HSG 6 huyện Hoằng Hóa 2018-2019)

Chứng minh rằng: $A=75.\left(4^{2018}+4^{2017}+....+4^2+5\right)$ chia hết cho 4^{2019}

Lời giải

$M=4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+5=4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4+1$

$4M=4.\left(4^{2018}+4^{2017}+.....+4^2+4+1\right)=4^{2019}+4^{2018}+.....+4^3+4^2+4$

$4M-M=4^{2019}-1\Rightarrow M=\frac{4^{2019}-1}{3}$

$\Rightarrow A=75.\left(4^{2019}-1\right):3+25=25.\left(4^{2019}-1\right)+25$

$=25.4^{2019}-25+25=25.4^{2019}\vdots 4^{2019}$

Bài 109. (Đề thi HSG 6 huyện Hoằng Hóa 2018-2019)

Chứng minh rằng $A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

$A=\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}\Rightarrow 3A=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^3}+.....+\frac{99}{3^{98}}-\frac{100}{3^{99}}$

$\Rightarrow 4A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 4A<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$ (1)

$4B=B+3B=3-\frac{1}{3^{99}}<3\Rightarrow B<\frac{3}{4}$ (2)

$Tu\ (1),(2)\Rightarrow 4A<B<\frac{3}{4}\Rightarrow A<\frac{3}{16}$

Đặt: $B=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{98}}-\frac{1}{3^{99}}$

$\Rightarrow 3B=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+.....+\frac{1}{3^{97}}-\frac{1}{3^{98}}$

Bài 110. (Đề thi HSG 6 huyện Tam Dương 2018-2019)

Cho $A=2012^{2012}+2^{2012}$ và $B=2012^{2012}$

a) Chứng tỏ rằng khi biểu diễn A,B dưới dạng các số tự nhiên thì số chữ số của A và số chữ số của B là bằng nhau

b) Ký hiệu $S_{(n)}$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n

Tìm n sao cho $S_{(n)}=n^2-2013n+6$

Lời giải

a) Giả sử số $B=2012^{2012}$ khi biểu diễn dưới dạng số tự nhiên có n chữ số, ta có:

$1000^{2012}<2012^{2012}<10^n\Rightarrow 10^n>10^{6036}\Rightarrow n>6036$

Giả sử khi số $A=2012^{2012}+2^{2012}$ biểu diễn dưới dạng số tự nhiên thì số A có nhiều hơn n chữ số, tức là A ít nhất có $n+1$ chữ số, suy ra:

$2012^{2012}+2^{2012}\ge 10^n\Rightarrow 2012^{2012}<10^n<2012^{2012}+2^{2012}$

$\Rightarrow 2^{2012}.1006^{2012}<2^{2012}.2^{n-2012}.5^n\le 2^{2012}.\left(1006^{2012}+1\right)$, do $n>6036$

$\Rightarrow 1006^{2012}<2^{n-2012}.5^n\le 1006^{2012}+1$

$\Rightarrow 2^{n-2012}.5^n=1006^{2012}+1$. Điều này là vô lý vì $1006^{2012}+1$ là số lẻ, còn $2^{n-2012}.5^n$ là số chẵn

Do đó số chữ số của A không nhiều hơn số chữ số của B $\Rightarrow dfcm$

b) Giả sử khi biểu diễn số tự nhiên n dưới dạng số thập phân, ta có:

$n=a_m.10^m+a_{m-1}.10^{m-1}+....+a_1.10+a_0$ (với a_i là các chữ số, $i=0,1,2,...,m;m\in\mathbb{N}$)

$n\ge a_m+a_{m-1}+....+a_1+a_0$

$\Rightarrow n\ge S_{(n)}$

$\Rightarrow n^2-2013n+6\le n$

$\Rightarrow n^2+6\le 2014n$

$\Rightarrow n+\frac{6}{n}\le 2014\Rightarrow n<2014$ (1)

Mà $S_{(n)}\ge 0\Rightarrow n^2-2013n+6\ge 0$

$\Rightarrow n^2+6\ge 2013n \Rightarrow n+\frac{6}{n}\ge 2013 \Rightarrow n\ge 2013$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n=2013$

Thử với $n=2013$ ta có :

$S_{(2013)}=2013^2-2013.2013+6=6$ (thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên n cần tìm là 2013.

Bài 111. (Đề thi HSG 6 huyện Thạch Thành 2018-2019)

Cho $A=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+....+\frac{1}{1+3+5+7+...+2017}$.

Chứng minh $A<\frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+....+\frac{1}{1+3+5+7+...+2017}$

$A=\frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}}+.....+\frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$

$=\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.6}+\frac{2}{4.8}+.....+\frac{2}{1009.2018}=\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+....+\frac{1}{1009.1009}$

$A<\frac{1}{2.2}+\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{1008.1009}\right)$

$A<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{1008}-\frac{1}{1009}\right)$

$A<\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1009}\right)\Rightarrow A<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Rightarrow A<\frac{3}{4}$

Bài 112. (Đề thi HSG 6 huyện Giao Thủy 2018-2019)

a) Tính tổng : $A=1.2+2.3+3.4+....+98.99$

b) Cho biểu thức $B=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+.....+\frac{1}{100^2}$

Chứng tỏ rằng $\frac{1}{6}<B<\frac{1}{4}$

Lời giải

$a)3A=1.2.3+2.3.3+3.4.3+.....+98.99.3$

$=1.2.3+2.3.(4-1)+3.4.(5-2)+.....+98.99.(100-97)$

$=1.2.3+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+.....+98.99.100-97.98.99=98.99.100$

$\Rightarrow A=98.99.100:3=323400$

b) $B=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+.....+\frac{1}{100^2}$

$\Rightarrow B<\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+.....+\frac{1}{99.100}$

$B<\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$B<\frac{1}{4}-\frac{1}{100}<\frac{1}{4}(1)$

$B>\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+....+\frac{1}{100.101}$

$B>\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+....+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$

$B>\frac{1}{5}-\frac{1}{101}=\frac{96}{505}>\frac{96}{576}=\frac{1}{6}\Rightarrow B>\frac{1}{6}(2)$

Từ (1) (2) $\Rightarrow \frac{1}{6}<B<\frac{1}{4}$

Bài 113. (Đề thi HSG 6 huyện Giao Thủy 2018-2019)

Cho $A=1+4+4^2+4^3+.....+4^{48}+4^{49}$; $B=4^{100}$

Chứng minh rằng: $A<\frac{B}{3}$

Lời giải

$4A=4.\left(1+4+4^2+4^3+.....+4^{98}+4^{99}\right)=4+4^2+4^3+.....+4^{99}+4^{100}$

$4A-A=4^{100}-1\Rightarrow A=\frac{4^{100}-1}{3}$

Vì $4^{100}-1<4^{100}\Rightarrow \frac{4^{100}-1}{3}<\frac{4^{100}}{3}\Rightarrow A<\frac{B}{3}$

Bài 114. (Đề thi HSG 6 trường Trần Phú 2018-2019)

Cho $M=2+2^2+2^3+2^4+.....+2^{2017}+2^{2018}$

a) Tính M

b) Chứng tỏ rằng M chia hết cho 3

Lời giải

a) Ta có $2M=2^2+2^3+2^4+.....+2^{2018}+2^{2019}$

Lấy $2M-M=2^{2019}-2$. Vậy $M=2^{2019}-2$

b)

$M=\left(2+2^2\right)+\left(2^3+2^4\right)+\left(2^5+2^6\right)+.....+\left(2^{2017}+2^{2018}\right)$

$M=2(1+2)+2^3.(1+2)+2^5.(1+2)+.....+2^{2017}.(1+2)$

$M=3.\left(2+2^3+2^5+.....+2^{2017}\right)$

Vậy $M\vdots 3$

Bài 115. **(Đề thi HSG 6 huyện Vĩnh Tường 2019-2020)**

Chứng minh rằng: $A=1+2+2^2+.....+2^{2009}\vdots 3$

Lời giải

$A=1+2+2^2+2^3+....+2^{2009}=(1+2)+2^2(1+2)+.....+2^{2008}.(1+2)\vdots 3$

Bài 116. (Đề thi HSG 6 huyện Nga Sơn 2016-2017)

Không sử dụng máy tính hãy tính giá trị của biểu thức: $A=2^2+4^2+6^2+.....+98^2$

Lời giải

$A=2^2+4^2+6^2+.....+98^2$

$2A=2.\left(2^2+4^2+.....+96^2+98^2\right)$

$=2.2.2+2.4.4+....+2.98.98=(1+3).2+(3+5).4+.....+(97+99).98$

$=1.2+2.3+3.4+4.5+.....+97.98+98.99$

$6A=3.1.2+3.2.3+.....+3.98.99$

$=1.2.3-0.1.2+2.3.4-1.2.3+.....+98.99.100-97.98.99$

$=98.99.100\Rightarrow A=98.99.100:6=167100$

Bài 117. (Đề thi HSG 6 huyện Nga Sơn 2016-2017)

Cho tổng $S=\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+.....+\frac{1}{60}$. Chứng minh $\frac{3}{5}<S<\frac{4}{5}$

Lời giải

$*)S=\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+.....+\frac{1}{40}\right)+\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+.....+\frac{1}{50}\right)+\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+....+\frac{1}{60}\right)$

$\Rightarrow S<\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+....+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+.....+\frac{1}{40}\right)+\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+.....+\frac{1}{50}\right)$

$\Rightarrow S<\frac{10}{30}+\frac{10}{40}+\frac{10}{50}\Rightarrow S<\frac{47}{60}<\frac{48}{60}\Rightarrow S<\frac{4}{5}$ (1)

$*)S>\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+.....+\frac{1}{40}\right)+\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+.....+\frac{1}{50}\right)+\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+....+\frac{1}{60}\right)$

$\Rightarrow S>\frac{10}{40}+\frac{10}{50}+\frac{10}{60}\Rightarrow S>\frac{37}{60}>\frac{36}{60}\Rightarrow S>\frac{3}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Bài 118. (Đề thi HSG 6 huyện Vĩnh Lộc 2017-2018)

Cho tổng $T=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+.....+\frac{2016}{2^{2015}}+\frac{2017}{2^{2016}}$. So sánh T với 3

Lời giải

$T=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+.....+\frac{2016}{2^{2015}}+\frac{2017}{2^{2016}}$

$2T=2+\frac{3}{2^1}+\frac{4}{2^2}+.....+\frac{2016}{2^{2014}}+\frac{2017}{2^{2015}}$

$2T-T=2+\frac{3}{2^1}-\frac{2}{2^1}+\frac{4}{2^2}-\frac{3}{2^2}+....+\frac{2016}{2^{2014}}-\frac{2015}{2^{2014}}+\frac{2017}{2^{2015}}-\frac{2016}{2^{2015}}-\frac{2017}{2^{2016}}$

$T=2+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^{2015}}-\frac{2017}{2^{2016}}$

Đặt $N=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^{2015}}\Rightarrow 2N=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^{2014}}$

$2N-N=1-\frac{1}{2^{2015}}\Rightarrow N<1$

Nên $T<2+1-\frac{2017}{2^{2016}}=3-\frac{2017}{2^{2016}}\Rightarrow T<3$

Bài 119. (Đề thi HSG 6 huyện 2018-2019)

1) Cho tổng gồm 2014 số hạng: $S=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{4^4}+.....+\frac{2014}{4^{2014}}$.

Chứng minh rằng $S<\frac{1}{2}$

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n, biết rằng $n+S(n)=2014$, trong đó $S(n)$ là tổng các chữ số của n.

Lời giải

1) $4S=1+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+.....+\frac{2014}{4^{2013}}$

$\Rightarrow 3S=4S-S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{4^{2013}}-\frac{2014}{4^{2014}}$

$\Rightarrow 3S<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{4^{2013}}.\text{Dat } M=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{4^{2013}}$

$\Rightarrow 4M=4+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{4^{2012}}$

$\Rightarrow 3M=4M-M=4-\frac{1}{4^{2013}}<4\Rightarrow M<\frac{4}{3}$

$\Rightarrow 3S<\frac{4}{3}\Rightarrow S<\frac{4}{9}<\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

2) Nếu n là số có ít hơn 4 chữ số thì $n\le 999$ và $S(n)\le 27$

Suy ra $n+S(n)\le 999+27=1026<2014(\text{ktm})$

Mặt khác $n\le n+S(n)=2014$ nên n là số có ít hơn 5 chữ số. Vậy n là số tự nhiên có 4 chữ số, suy ra $S(n)\le 9.4=36$. Do vậy, $n\ge 2014-36=1978$

Vì $1978\le n\le 2014\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=\overline{19ab} \\ n=\overline{20cd}\end{array}\right.$

*Nếu $n=\overline{19ab}$. Ta có: $\overline{19ab}+(1+9+a+b)=2014$

$\Leftrightarrow 1910+11a+2b=2014\Leftrightarrow 11a+2b=104\Rightarrow a\,\vdots\,2$

Và $11a=104-2b\ge 104-2.9=86\Rightarrow 8\le 10<a, a\,\vdots\,2\Rightarrow a=8\Rightarrow b=8$

$\Rightarrow n=1988(\text{tm})$

*Nếu $n=\overline{20cd}$. Ta có: $\overline{20cd}+(2+0+c+d)=2014$

$\Rightarrow 2002+11c+2d=2014\Rightarrow 11c+2d=12\Rightarrow c\,\vdots\,2$

Và $11c\le 12\Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=0\Rightarrow d=6\Rightarrow n=2006(\text{tm}) \\ c=1\Rightarrow 2d=1(\text{ktm})\end{array}\right.$

Vậy $n\in\{1988;2006\}$

Bài 120. (Đề thi HSG 6 huyện Hậu Lộc 2017-2018)

Thực hiện phép tính: $A=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)....\left(1+\frac{1}{2017.2019}\right)$

Lời giải

$A=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)....\left(1+\frac{1}{2017.2019}\right)$

$=\frac{4}{1.3}.\frac{9}{2.4}.\frac{16}{3.5}.....\frac{2018^2}{2017.2019}=\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}.....\frac{2018.2018}{2017.2019}$

$$=\frac{2.3.4.....2018.2.3.4.....2018}{1.2.3.....2017.3.4.5.....2019}=\frac{2018.2}{1.2019}=\frac{4036}{2019}$$

Bài 121. (Đề thi HSG 6 huyện 2018-2019)

Thực hiện tính:

a) $A=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+.....+\frac{1}{2013}.(1+2+....+2013)$

b) $B=\frac{1-3}{1.3}+\frac{2-4}{2.4}+\frac{3-5}{3.5}+\frac{4-6}{4.6}+....+\frac{2011-2013}{2011.2013}+\frac{2012-2014}{2012.2014}-\frac{2013.2014}{2013.2014}$

Lời giải

a) Ta có $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$$\Rightarrow A=1+\frac{1}{2}.\frac{2.3}{2}+\frac{1}{3}.\frac{3.4}{2}+.....+\frac{1}{2013}.\frac{2013.2014}{2}=1+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+.....+\frac{2014}{2}$$

$$A+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+.....+\frac{2014}{2}=\frac{1}{2}.(1+2+3+.....+2014)$$

$$A=\frac{1}{2}.(1+2+3+.....+2014)-\frac{1}{2}=1014552$$

b) $B=-2\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+....+\frac{1}{2011.2013}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+.....+\frac{1}{2012.2014}\right)-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$

$$\text{Thay}:\begin{cases}\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right);\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right);.....;\frac{1}{2011.2013}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}\right)\\ \frac{1}{2.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right);\frac{1}{4.6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right);.....;\frac{1}{2012.2014}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow B=-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014}\right)-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$$

$$B=-\frac{3}{2}$$

Bài 122. (Đề thi HSG 6 huyện Cẩm Thủy 2017-2018)

Cho $S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{9^2}$. Chứng minh $S<\frac{8}{9}$

Lời giải

$$S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{9^2}$$

Ta có

$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}$

$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}$

.....

$\frac{1}{9^2} < \frac{1}{8.9}$

$\Rightarrow S < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{8.9} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Vậy $S < \frac{8}{9}$

Bài 123. (Đề thi HSG 6 huyện Cẩm Thủy 2017-2018)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1+2+3+...+n = \overline{aaa}$

Lời giải

$1+2+3+...+n = \overline{aaa} \Rightarrow (1+n).n:2 = 111.a \Rightarrow n(n+1) = 2.3.37.a$

Mà 37 là số nguyên tố

* nếu n > 37 suy ra $n \geq 37.2 = 74$ khi đó $n+1 \leq 3.a \leq 3.9 = 27 \Rightarrow n \leq 26$ vô lý

Nên $n \leq 37$ suy ra chỉ xảy ra n = 37 hoặc n + 1 = 37

+) Với n = 37 $\Rightarrow 37.38 = 2.3.37.a \Rightarrow 38 = 6.a \Rightarrow a = \frac{38}{6} \notin N$ (loại)

+) Với n + 1 = 37 $\Rightarrow 36.37 = 2.3.37.a \Rightarrow 36 = 6.a \Rightarrow a = 6 \in N$ thỏa mãn

Vậy n = 36, a = 6

Bài 124. (Đề thi HSG 6)

Tính: $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{20}$

Lời giải:

$2A = 8 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{21}$.

$\Rightarrow 2A - A = 2^{21} + 8 - (4 + 2^2) + (2^3 - 2^3) + ...(2^{20} - 2^{20}) = 2^{21}$

Bài 125. (Đề thi HSG 6)

Cho : $S = 3^0 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{2002}$

a) Tính S

b) Chứng minh $S \vdots 7$.

Lời giải:

a) Ta có $S = 3^0 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{2002}$

$3^2 S = 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8 + ... + 3^{2004}$ (0,5đ)

Suy ra: $8S = 3^{2004} - 1 \Rightarrow S = \frac{3^{2004} - 1}{8}$ (0,5đ)

b) $S = \left(3^0+3^2+3^4\right)+3^6\left(3^0+3^2+3^4\right)+...+3^{1998}\left(3^0+3^2+3^4\right)$

$= \left(3^0+3^2+3^4\right)\left(1+3^6+...+3^{1998}\right)$

$= 91\left(1+3^6+...+3^{1998}\right)$ (0,75đ) suy ra: $S \vdots 7$ (0,25đ)

Bài 126. (Đề thi HSG 6)

Cho A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 ……+ 3^{100} chứng minh A chia hết cho 120

Lời giải:

Ta nhóm làm 25 nhóm, mỗi nhóm 4 số hạng như sau:
A = (3 + 3^2 + 3^3+ 3^4) +……+ (3^{97}+3^{98}+3^{99}+3^{100})
= 3 (1 + 3 + 3^2+3^3)+…….+ 3^{97}(1+3+3^2+3^3) 0,5 đ
Ta lại thấy: 1 + 3 + 3^2+3^3 = 40
Nên A = 40. (3 + 3^5 +3^9 +……+3^{97}) 0,5đ
= 40.3 (3^0 + 3^4 +3^8 +……+3^{96}) 0,5đ
= 120. (3^0 + 3^4 +3^8 +……+3^{96})
Điều này chứng tỏ $A \vdots 120$ (đpcm) 0,5đ

Bài 127. (Đề thi HSG 6)

Cho A = 7 + 7^3 + 7^5 + ... + 7^{1999} . Chứng minh rằng A chia hết cho 35

Lời giải:

A = 7 + 7^3 + 7^5 + ... + 7^{1999} = (7 + 7^3) + (7^5 + 7^7) + ... + (7^{1997} +7^{1999})

A = 7(1 + 7^2) + 7^5(1 + 7^2) + ... + 7^{1997}(1 + 7^2)

A = 7.50 + 7^5 .50 + 7^9.50 + ... + 7^{1997}.50

$\Rightarrow$ A Chia hết cho 5 (1)

A = 7 + 7^3 + 7^5 + ... + 7^{1999} = 7.(7^0 + 7^2 + 7^4 + ... + 7^{1998})

$\Rightarrow$ A Chia hết cho 7 (2)

Mà ƯCLN(5,7) = 1 $\Rightarrow$ A Chia hết cho 35.

Bài 128. (Đề thi HSG 6)

Cho $\frac{m}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{1998}$ với *m, n* là số tự nhiên

Lời giải:

$\frac{m}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{1998}$. Từ 1 đến 1998 có 1998 số Nên vế phải có 1998 số hạng ta ghép thành 999 cặp như sau:

$$\frac{m}{n} = \left(1+\frac{1}{1998}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1997}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1996}\right)+.....+\left(\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}\right)$$

$$= \frac{1999}{1.1998}.+\frac{1999}{2.1997}+\frac{1999}{3.1996}+.....+\frac{1999}{999.1000}$$

Quy đồng tất cả 999 phân số này ta được:

$$\frac{m}{n} = \frac{1999.a_1+1999.a_2+1999.a_3+.....+1999.a_{997}+1999.a_{998}+1999.a_{999}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.....1996.19978.1998}$$

Với a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_{998} , a_{999} $\in$ N

$$\frac{m}{n}=\frac{1999.(a_1+a_2+a_3+.....+a_{997}+a_{998}+a_{999})}{1.2.3.....1996.1997.1998}$$

Vì 1999 là số nguyên tố. Nên sau khi rút gọn, đưa về dạng phân số tối giản thì tử số vẫn còn thừa số 1999. Vậy *m* Chia hết cho 1999.

Bài 129. (Đề thi HSG 6 huyện Đầm Hà trường Quảng Lợi 2007-2008)

Tính các tổng sau bằng phương pháp hợp lý nhất:

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{49.50}$$

$$B=\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+...+\frac{2}{37.39}$$

Lời giải

Ta có:

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{49.50}$$

$$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$$

$$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$$

Ta còn có:

$$B=\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+...+\frac{2}{37.39}$$

$$B=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{37}-\frac{1}{39}$$

$$B=\frac{1}{3}-\frac{1}{39}=\frac{12}{39}=\frac{4}{13}.$$

Bài 130. (Đề thi HSG 6 huyện Đầm Hà trường Quảng Lợi 2007-2008)

Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ biết: $1+3+5+...+(2n-1)=225$.

Lời giải

Ta có: $1+3+5+...+(2n-1)=\frac{(1+2n-1).n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2$

suy ra $n^2=225$

Vậy $n=15$

Bài 131. (Đề thi HSG 6)

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$C=\frac{16}{15.31}+\frac{14}{31.45}+\frac{7}{45.52}+\frac{7}{52.65}+\frac{1}{13.70}.$$

Lời giải

$$C=\frac{16}{15.31}+\frac{14}{31.45}+\frac{7}{45.52}+\frac{7}{52.65}+\frac{1}{13.70}$$

$$=\frac{1}{15}-\frac{1}{31}+\frac{1}{31}-\frac{1}{45}+\frac{1}{45}-\frac{1}{52}+\frac{1}{52}-\frac{1}{65}+\frac{5}{65.70}$$

$$=\frac{1}{15}-\frac{1}{31}+\frac{1}{31}-\frac{1}{45}+\frac{1}{45}-\frac{1}{52}+\frac{1}{52}-\frac{1}{65}+\frac{1}{65}-\frac{1}{70}$$

$$=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}\quad=\frac{14-3}{15.14}\quad=\frac{11}{210}$$

Bài 132. (Đề thi HSG 6 huyện Ngọc Lạc trường Cao Thịnh 2006-2007)

Tính giá trị của biểu thức :

a) $A=1+(-2)+3+(-2)+...+2003+(-2004)+2005$

b) $B=1-7+13-19+25-31+...$ (B có 2005 số hạng)

Lời giải

a) $A=1+(-2+3)+(-3+4)+...+(-2002+2003)+(-2004+2005)$

$=1+1+1+....+1+1+1$(có 1002 số hạng)

$=1003$

b) $B=1-7+13-19+25-31+...$ (B có 2005 số hạng)

$=1+C$

Ta còn có: $C=(-7+13)+(-19+25)+(-31+37)+....$(C có 1002 cặp)

$=6+6+6+....$

$=6012$

Vậy $B=6013$

Bài 133. (Đề thi HSG 6 Phòng GD-ĐT Tam Dương 2018-2019)

Cho $A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....-\frac{1}{2012};B=\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+.....+\frac{1}{2012}$.

Tính $\left(\frac{A}{B}\right)^{2013}$

Lời giải

Ta có: $A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2012}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2012}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{2012}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2012}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{1006}\right)$

$=\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+.....+\frac{1}{2012}=B$

Suy ra: $\frac{A}{B}=1\Rightarrow\left(\frac{A}{B}\right)^{2013}=1^{2013}=1$

Vậy $\left(\frac{A}{B}\right)^{2013}=1$

Bài 134. (Đề thi HSG cấp trường)

Chứng minh rằng:

$a)\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}<\frac{1}{3}$

$b)\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^4}+.....+\frac{99}{3^{99}}-\frac{100}{3^{100}}<\frac{3}{16}$

Lời giải

a) Đặt $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}$

$$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$$

$$\Rightarrow 2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{2^6 - 1}{2^6} < 1$$

$$\Rightarrow 3A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$$

b) Đặt $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + ... + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

$$\Rightarrow 3A = 1 - \frac{2}{3} - \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{3}{3^4} + ... + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 4A < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \qquad (1)$$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$

$$\Rightarrow 3B = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$4B = B + 3B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4A < B < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$

Bài 135. (Đề thi HSG cấp trường)

Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 99.100$

Lời giải

$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 99.100$

$3S = (1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + 99.100).3$

$= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + ... + 99.100.3$

$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + ... + 99.100.(101-98)$

$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - .... - 98.99.100 + 99.100.101$

$S = 99.11.101 : 3 = 33.100.101$

Bài 136. (Đề thi HSG cấp trường)

Chứng tỏ rằng $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + ... + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải

Ta thấy $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số

Vậy $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + ... + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80}$

$$=\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+.....+\frac{1}{59}+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{1}{61}+\frac{1}{62}+.....+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}\right) \quad (1)$$

Vì $\frac{1}{41}>\frac{1}{42}>.....>\frac{1}{60}$ và $\frac{1}{61}>\frac{1}{62}>.....>\frac{1}{80}$ (2)

Ta có: $\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+.....+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{80}+.....+\frac{1}{80}+\frac{1}{80}\right)$

$$=\frac{20}{60}+\frac{20}{80}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \quad (3)$$

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+.....+\frac{1}{78}+\frac{1}{79}+\frac{1}{80}>\frac{7}{12}$

Bài 137. (Đề thi HSG cấp trường)

Tính tổng $S=\frac{6}{2.5}+\frac{6}{5.8}+\frac{6}{8.11}+.....+\frac{6}{29.32}$ và chứng tỏ $S<1$

Lời giải

Ta có $S=2.\left(\frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+.....+\frac{3}{29.32}\right)$

$$=2.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)=2.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)=\frac{30}{32}<1$$

Vậy $S<1$

Bài 138. (Đề thi HSG cấp trường)

Cho 10 số tự nhiên bất kỳ: $a_1,a_2,.....,a_{10}$. Chứng minh rằng thế nào cũng có một số hoặc một tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy đều chia hết cho 10.

Lời giải

Lập dãy số

Đặt $B_1=a_1$

$B_2=a_1+a_2$

$B_3=a_1+a_2+a_3$

.....

$B_{10}=a_1+a_2+.....+a_{10}$

Nếu tồn tại $B_i\,(i=1,2,3....10)$ nào đó chia hết cho 10 thì bài toán được chứng minh

Nếu không tồn tại B_i nào chia hết cho 10 ta làm như sau:

Ta đem B_i chia cho 10 sẽ được 10 số dư (các số dư $\in\{1,2,3,...,9\}$). Theo nguyên tắc Dirichle, phải có ít nhất 2 số dư bằng nhau. Các số B_m-B_n chia hết ch10 $(m>n)$ (đpcm)

Bài 139. (Đề thi HSG cấp trường)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1+2+3+.....+n=\overline{aaa}$

Lời giải

Từ 1; 2;……;n có n số hạng

Suy ra $1+2+.....+n=\frac{n.(n+1)}{2}$

Mà theo bài ta có: $1+2+3+.....+n=\overline{aaa}$

Suy ra $\frac{(n+1)n}{2}=\overline{aaa}=a.111=a.3.37\Rightarrow n(n+1)=2.3.37.a$

Vì tích $n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37 nên n hoặc $n+1$ chia hết cho 37

Vì số $\frac{(n+1)n}{2}$ có 3 chữ số nên $n+1<74\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n=37\\n+1=37\end{array}\right.$

Với $n=37$ thì $\frac{37.38}{2}=703(ktm)$

Với $n+1=37\Rightarrow\frac{36.37}{2}=666(tm)$

Vậy $n=36,a=6\Rightarrow 1+2+3+.....+36=666$

Bài 140. (Đề thi HSG cấp trường)

Cho $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{48}+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}$ và $P=\frac{1}{49}+\frac{2}{48}+\frac{3}{47}+.....+\frac{48}{2}+\frac{49}{1}$. Hãy tính $\frac{S}{P}$

Lời giải

$$P=\frac{1}{49}+\frac{2}{48}+\frac{3}{47}+.....+\frac{48}{2}+\frac{49}{1}$$

$$=\left(\frac{1}{49}+1\right)+\left(\frac{2}{48}+2\right)+\left(\frac{3}{47}+1\right)+.....+\left(\frac{48}{2}+1\right)+1$$

$$=\left(\frac{50}{49}+\frac{50}{48}+.....+\frac{50}{2}\right)+1=\frac{50}{50}+\frac{50}{49}+\frac{50}{48}+.....+\frac{50}{2}$$

$$=50.\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{49}+....+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{S}{P}=\frac{1}{50}$$

Bài 141. (Đề thi HSG cấp trường)

Cho $M=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+.....+\frac{1}{2009^2}+\frac{1}{2010^2}$. Chứng minh $M<1$

Lời giải

Ta có:

$$M<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{2008.2009}+\frac{1}{2009.2010}$$

$$M<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}$$

$$M<1-\frac{1}{2010}\Rightarrow M<1$$

Bài 142. (Đề thi HSG cấp trường Bắc Nghĩa)

Tính $M=\frac{3}{5.7}+\frac{3}{7.9}+\frac{3}{9.11}+.....+\frac{3}{59.61}$

b) Cho $A=\dfrac{\frac{1}{99}+\frac{2}{98}+\frac{3}{97}+.....+\frac{99}{1}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{100}}$ và $B=\dfrac{92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-.....-\frac{92}{100}}{\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+....+\frac{1}{500}}$. Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$a)M=\frac{3}{5.7}+\frac{3}{7.9}+\frac{3}{9.11}+.....+\frac{3}{59.61}$

$=\frac{3}{2}.\left(\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+.....+\frac{2}{59.61}\right)$

$=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{59}-\frac{1}{61}\right)$

$=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{61}\right)=\frac{3}{2}.\frac{56}{305}=\frac{84}{305}$

$b)A=\dfrac{\frac{1}{99}+\frac{2}{98}+\frac{3}{97}+.....+\frac{99}{1}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{100}}=\dfrac{\left(\frac{1}{99}+\frac{2}{98}+\frac{3}{97}+...+\frac{98}{2}\right)+99}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{100}}$

Tử số

$=\left(\frac{100}{99}-1\right)+\left(\frac{100}{98}-1\right)+.....+\left(\frac{100}{2}-1\right)+\frac{99}{1}$

$=\left(\frac{100}{99}+\frac{100}{98}+\frac{100}{97}+.....+\frac{100}{2}\right)-(1+1+1+....+1)+\frac{99}{1}$

$=\frac{100}{99}+\frac{100}{98}+\frac{100}{97}+.....+\frac{100}{2}+\frac{100}{100}$

$=100.\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{99}+\frac{1}{98}+.....+\frac{1}{2}\right)$

Vậy $A=\dfrac{100.\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{99}+....+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{100}}=100$ (1)

$B=\dfrac{92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-.....-\frac{92}{100}}{\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+....+\frac{1}{500}}$

Tử số

$=92-\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{3}{11}-.....-\frac{92}{100}$

$$=92-\left(1-\frac{8}{9}\right)-\left(1-\frac{8}{10}\right)-\left(1-\frac{8}{11}\right)-.....-\left(1-\frac{8}{100}\right)$$

$$=92-(1+1+1+1+.....+1)+\left(\frac{8}{9}+\frac{8}{10}+\frac{8}{11}+.....+\frac{8}{100}\right)$$

$$=0+40.\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+.....+\frac{1}{500}\right)$$

Vậy $B=\dfrac{40\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+.....+\frac{1}{500}\right)}{\frac{1}{45}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+.....+\frac{1}{500}}=40$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{A}{B}=\dfrac{100}{40}=250\%$

Bài 143. (Đề thi HSG huyện Việt Yên)

Cho $A=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^4+.....+\left(\frac{3}{2}\right)^{2012}$ và $B=\left(\frac{3}{2}\right)^{2013}:2$

Lời giải

Ta có:

$$A=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^4+.....+\left(\frac{3}{2}\right)^{2012} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}A=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^4+.....+\left(\frac{3}{2}\right)^{2013} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được:

$$\frac{3}{2}A-A=\left(\frac{3}{2}\right)^{2013}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}A=\left(\frac{3}{2}\right)^{2013}+\frac{5}{4}\Rightarrow A=\frac{3^{2013}}{2^{2012}}+\frac{1}{2}$$

Vậy $B-A=\dfrac{3^{2013}}{2^{2014}}-\dfrac{3^{2013}}{2^{2012}}+\dfrac{5}{2}$

Bài 144. (Đề thi HSG huyện Quỳnh Lưu)

Cho biểu thức : $M=5+5^2+5^3+.....+5^{80}$. Chứng tỏ rằng:

a) M chia hết cho 6

b) M không phải là số chính phương.

Lời giải

$a)M=5+5^2+5^3+.....+5^{80}$

$=\left(5+5^2\right)+\left(5^3+5^4\right)+....+\left(5^{79}+5^{80}\right)$

$=\left(5+5^2\right)+5^2.\left(5+5^2\right)+.....+5^{78}.\left(5+5^2\right)$

$=30.\left(1+5^2+.....+5^{78}\right)\vdots 30$

b) Ta thấy : $M=5+5^2+5^3+.....+5^{80}$ chia hết cho 5 (1)

Mặt khác, do $5^2+5^3+.....+5^{80}$ chia hết cho 5^2

Suy ra $M=5+5^2+5^3+.....+5^{80}$ không chia hết cho 25 (2)

Từ (1) và (2) suy ra M không là số chính phương.

Bài 145. (Đề thi HSG 6 quận Ba Đình 1990-1991)

Cho $A=\frac{4}{31.7}+\frac{6}{7.42}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57}$

$B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}$

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$?

Lời giải

$$A=\frac{4}{31.7}+\frac{6}{7.41}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57}=\frac{1}{7}\left(\frac{4}{31}+\frac{6}{41}\right)+\frac{1}{10}\left(\frac{9}{41}+\frac{7}{57}\right)=\frac{50}{31.41}+\frac{80}{41.57}=\frac{130}{31.57}$$

$$B=\frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}=\frac{1}{19}\left(\frac{7}{31}+\frac{5}{43}\right)+\frac{1}{23}\left(\frac{3}{43}+\frac{11}{57}\right)=\frac{24}{31.43}+\frac{28}{43.57}=\frac{52}{31.57}$$

Vậy $\frac{A}{B}=\frac{130}{52}$

Bài 146. (Đề thi HSG 6 trường THCS Lê Ngọc Hân 1997-1998)

Tính tổng: $A=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ldots+\frac{1}{27.28.29.30}$

$B=\frac{4}{5.8}+\frac{4}{8.11}+\frac{4}{11.14}+\ldots+\frac{4}{305.308}$

Lời giải:

Ta có : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$=\frac{3}{3n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$=\frac{3+n-n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$

Nên : A = $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{27.28.29.30}$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{28.29.30}\right]=\frac{1}{3}.\frac{4059}{28.29.30}=\frac{451}{8120}$$

B = $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+.....+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{305}+\frac{1}{308}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{308}\right)=\frac{4.303}{3.5.308}=\frac{101}{385}$

Vậy $A+B=\frac{451}{8120}+\frac{101}{385}=\frac{28390}{89320}$

Bài 147. **(Đề thi HSG 6_ *Quận Hai bà Trưng 1996 - 1997*)**

Cho dãy phân số được viết theo qui luật: $\frac{2}{11.16};\frac{2}{16.21};\frac{2}{21.26};\ldots$

a) Tìm phân số thứ 45 của dãy số này.

b) Tính tổng của 45 phân số này.

Lời giải:

a) Phân số thứ 45 của dãy số là : $\frac{2}{231.236}$

b) Tổng của 45 phân số này là :

$$\frac{2}{5}\left(\frac{5}{11.16}+\frac{5}{16.21}+\ldots+\frac{5}{231.236}\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{21}+\ldots+\frac{1}{231}-\frac{1}{236}\right)=\frac{45}{1298}$$

Bài 148. **(Đề thi HSG 6)**

a) Tính tổng: $S=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{2}{98.99}+\frac{2}{99.100}$

b) Chứng minh rằng: $\left(3+3^2+3^3+3^4+\ldots+3^{100}\right)\vdots 40$

Lời giải:

a) $S=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{2}{98.99}+\frac{2}{99.100}$

$$=2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{100}\right)=2.\frac{99}{100}=\frac{99}{50}=1\frac{49}{50}$$

b) $3+3^2+3^3+3^4+\ldots+3^{100}$

$$=\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+\left(3^5+3^6+3^7+3^8\right)+\ldots+\left(3^{97}+3^{98}+3^{99}+3^{100}\right)$$

$$=\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+3^4\left(3+3^2+3^3+3^4\right)+\ldots+3^{96}\left(3+3^2+3^3+3^4\right)$$

$$=120.3^0+3^4.120+\ldots+3^{96}.120$$

$$=120.\left(3^0+3^4+\ldots+3^{96}\right)\vdots 40$$

Bài 149. **(Đề thi HSG 6)**

Một dãy số cộng có 45 số hạng. Biết số hạng ở chính giữa là 50. Hãy xác định dãy số cộng.

Lời giải:

Trước số hạng chính giữa có 22 số hạng , sau số hạng chính giữa có 22 số hạng.

* Nếu công sai $d = 1$ thì $u_1 = 50 - 22 = 28$

Dãy số đó là 28, 29, 30,...50,...71, 72.

* Nếu công sai $d = 2$ thì $u_1 = 50 - 22.2 = 6$

$$u_{45} = 50 + 22.2 = 94$$

Dãy số đó là 6, 8, 10,...50,...92, 94.

Dễ thấy công sai d không thể lớn hơn 2.

TAILIEU.COM