

VÒNG 4

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 03 tháng 6 năm 2022

Thời gian làm bài: 120 phút.

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{5}{\sqrt{x} - 2} - \frac{16 + 2\sqrt{x}}{x - 4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$.

3) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $5A + B \leq 3$.

Bài II (2,0 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Trong phong trào thi đua trồng cây dịp đầu năm mới, lớp 9A đặt kế hoạch trồng 300 cây xanh cùng loại, mỗi học sinh trồng số cây như nhau. Đến đợt lao động, do ảnh hưởng của dịch COVID-19 nên 5 bạn không tham gia trồng cây được. Vì vậy mỗi bạn còn lại đã trồng thêm 2 cây để đảm bảo hoàn thành kế hoạch đặt ra. Tìm số học sinh của lớp 9A.

2) Người ta nhún chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $12,8\text{cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm $8,5\text{cm}$. Tính thể tích của tượng đá?

Bài III (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \frac{3}{y} = 4 \\ 2\sqrt{2x+1} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 6x - m + 2$.

a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

b) Tìm m để A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{5x_2}$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H .

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Đường phân giác của góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N .

Chứng minh $\frac{MF}{MB} = \frac{NE}{NC}$.

c) Chứng minh đường trung trực của đoạn EF đi qua trung điểm của MN .

Bài V (0,5 điểm)

Với hai số thực x, y không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3$.

----- HẾT -----

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 03 tháng 6 năm 2022
Thời gian làm bài: 120 phút.

HƯỚNG DẪN CHUNG

+) Điểm toàn bài để lẻ đến 0,25.

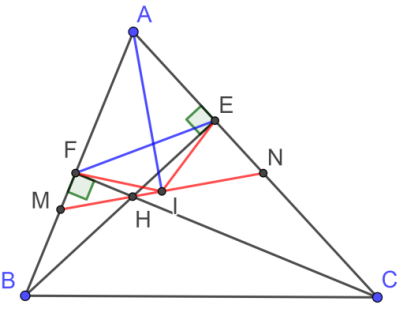
+) Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tương ứng với biểu điểm của hướng dẫn chấm.

+) Các tình huống phát sinh trong quá trình chấm do các trường tự quy định, thống nhất.

HƯỚNG DẪN CHẤM (ĐỀ CHÍNH THỨC)

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.	0,5
		Thay $x = 9$ (TMDK) vào biểu thức A.	0,25
		Tính được $A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9} + 2} = \frac{3}{5}$.	0,25
	2)	Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$.	1,0
		Với $x \geq 0, x \neq 4$ ta có:	
		$B = \frac{5}{\sqrt{x} - 2} - \frac{16 + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$	0,25
		$B = \frac{5(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{16 + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$	0,25
		$= \frac{3\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$	0,25
		$B = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$.	0,25
	3)	Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $5A + B \leq 3$.	0,5
Với $x \geq 0, x \neq 4$ ta có:			
$5A + 3B = \frac{5\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2}$			
	$\frac{5\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} \leq 3 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} + 3 \leq 3\sqrt{x} + 6 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{9}{4}$	0,25	
	Vậy giá trị nguyên lớn nhất của x thỏa mãn yêu cầu là $x = 2$.	0,25	
1)	Tìm số học sinh của lớp 9A.	1,5	

Bài II 2,0 điểm m		Gọi số học sinh của lớp 9A là $x(x \in N^*)$ (học sinh).	
		Số cây mỗi học sinh dự định trồng theo kế hoạch là $y(x \in N^*)$ (cây).	0,25
		Vì tổng số cây cả lớp dự định trồng theo kế hoạch là 300 nên ta có $xy = 300$. (1)	0,25
		Do có 5 học sinh nghỉ ốm nên số học sinh tham gia trồng cây trong thực tế là $x - 5$ (học sinh). Số cây mỗi học sinh trồng trong thực tế là: $y + 2$ (cây).	0,25
		Ta có phương trình $(x - 5)(y + 2) = xy \Leftrightarrow 2x - 5y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 10}{5}$	0,25
		Thế vào (1) ta có phương trình: $x \frac{(2x - 10)}{5} = 300 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x - 1500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 (tm) \\ x = -25 (l) \end{cases}$	0,25
		Vậy lớp 9A có 30 học sinh	0,25
	Tính thể tích của tượng đá ?	0,5	
2)	Thể tích của tượng đá chính bằng thể tích phần nước trong lọ dâng lên.	0,25	
	Thể tích là: $V = 8,5 \cdot 12 \cdot 8 = 108,8 cm^3$	0,25	
Bài III 2,5 điểm m	1)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \frac{3}{y} = 4 \\ 2\sqrt{2x+1} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$	1,0
		Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}; y \neq 0$	0,25
		Giải hệ phương trình, tìm được $\begin{cases} \sqrt{2x+1} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$	0,25
		Từ đó: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ (TM ĐKXĐ).	0,25
		Kết luận: Hệ có cặp nghiệm $(0; 1)$	0,25
	2a)	Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt ...	0,75
		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $x^2 = 6x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + m - 2 = 0$ (*)	0,25
		$\Delta' = 9 - m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 11$	0,25
		Vậy với $m < 11$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.	0,25
		Tìm m để A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{5x_2}$.	0,75
2b)	Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*)		
	Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 x_2 = m - 2 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$ (**)	0,25	
	Vì x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1} = \sqrt{5x_2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 = 5x_2 \end{cases}$		
	thay vào (**) suy ra $6x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 5$ Suy ra $m - 2 = 5 \Rightarrow m = 7$	0,25	
	Thử lại với $m = 7$ phương trình có 2 nghiệm là $x = 1$ hoặc $x = 5$ (thỏa mãn) Vậy $m = 7$	0,25	
Bài IV	1)	Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp.	1,0
		Vẽ đúng hình đến ý 1).	0,25

3,0 điểm m		Chỉ ra được $\widehat{AEH} = 90^\circ, \widehat{AFH} = 90^\circ$ Xét tứ giác AEHF có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau suy ra tứ giác AEHF nội tiếp	0,25 0,5
2)	Đường phân giác của góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh $\frac{MF}{MB} = \frac{NE}{NC}$. Tam giác HFB có HM là phân giác. Suy ra $\frac{MF}{MB} = \frac{HF}{HB}$. Tam giác HEC có HN là phân giác. Suy ra $\frac{NE}{NC} = \frac{HE}{HC}$. Chứng minh $\triangle HFB \sim \triangle HEC$ Suy ra $\frac{HC}{HB} = \frac{HE}{HF} \Rightarrow \frac{HF}{HB} = \frac{HE}{HC}$ Vậy $\frac{MF}{MB} = \frac{NE}{NC}$.	1,0 0,25 0,25 0,25 0,25	
3)	Chứng minh trung trực của EF đi qua trung điểm của MN. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh $\widehat{FMH} = \widehat{ENH}$ suy ra $\triangle AMN$ cân tại A Suy ra $AI \perp MN$. Chứng minh 5 điểm A, E, I, H, F thuộc đường tròn đường kính AH. Suy ra $\widehat{FIE} = \widehat{FAE}$ và $\widehat{FEI} = \widehat{FAF}$ Vì AI là phân giác góc \widehat{MAN} suy ra $\widehat{FEI} = \widehat{FIE}$ Suy ra tam giác IEF cân tại I. Vậy trung trực của EF đi qua trung điểm của MN.	1,0 0,25 0,25 0,25 0,25	
Bài V 0,5 điểm m	Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3$. Đặt $t = x + y$ suy ra $xy = \frac{t^2 - 4}{2}$. Chứng minh $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$; Suy ra $P = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = t(4 - \frac{t^2 - 4}{2})$ Xét $P - 8 = t(4 - \frac{t^2 - 4}{2}) - 8 = \frac{1}{2}(t - 2)^2(-t - 4) \leq 0 \Rightarrow P \leq 8$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ Vậy giá trị lớn nhất của $P = 8$ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$	0,5 0,25 0,25	