

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 11/5/2022

Thời gian làm bài: 120 phút

**Bài I (2,0 điểm)**

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$  và  $B = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+6}}{x-4}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

- 1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 49$ .
- 2) Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ .
- 3) Tìm tất cả giá trị của  $x$  để biểu thức  $P = A \cdot B$  có giá trị âm.

**Bài II (2,0 điểm)**

- 1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Khôi đi xe đạp từ nhà đến trường trên quãng đường dài 4 km. Khi đi từ trường về nhà vẫn trên con đường đó, Khôi đạp xe với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình lúc đi là 2 km/h. Tổng thời gian đạp xe cả đi và về của Khôi là 44 phút. Tính vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ nhà đến trường.

- 2) Một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy 15 cm và diện tích xung quanh của khúc gỗ là  $2400\pi$  (cm<sup>2</sup>). Tính chiều cao của hình trụ.

**Bài III (2,5 điểm)**

- 1) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{y-5} = 2 \\ 3\sqrt{x-3} - 2\sqrt{y-5} = 1 \end{cases}$$

- 2) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = mx + 3$ .
  - a) Chứng minh với mọi giá trị của  $m$ , đường thẳng  $(d)$  luôn cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$ .
  - b) Tìm  $m$  để  $x_1^2 = 4 - mx_2$ .

**Bài IV (3.0 điểm).** Từ điểm  $M$  cố định nằm ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là hai tiếp điểm). Một đường thẳng  $d$  thay đổi đi qua  $M$ , cắt đường tròn  $(O)$  tại hai điểm  $N, P$  sao cho  $MN < MP$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $NP$ .

- 1) Chứng minh năm điểm  $A, M, B, O, K$  cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Chứng minh  $KM$  là tia phân giác của góc  $\widehat{AKB}$ .
- 3) Tia  $BK$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $Q$ . Xác định vị trí của đường thẳng  $d$  để diện tích tam giác  $MPQ$  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài V (0.5 điểm).** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a + b + c = 3$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $K = a\sqrt{3+bc} + b\sqrt{3+ac} + c\sqrt{3+ab}$ .

HƯỚNG DẪN CHẤM CHO ĐỀ CHÍNH THỨC

(gồm 04 trang)

HƯỚNG DẪN CHUNG

+) Điểm toàn bài đề lẻ đến 0,25.

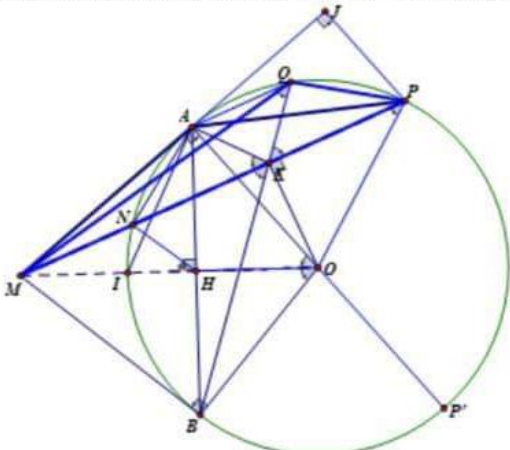
+) Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tương ứng với biểu điểm của hướng dẫn chấm.

+) Các tình huống phát sinh trong quá trình chấm do Hội đồng chấm thi quy định, thống nhất bằng biên bản.

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x = 49$ .	0,5
		Thay $x = 49$ . (TMDK) vào biểu thức $A$ .	0,25
		Tính được $A = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{49}+2} = \frac{7}{9}$	0,25
	2)	Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ .	1,0
		$B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+8}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}-2+x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$	0,25
		Tìm tất cả giá trị của $x$ để biểu thức $P = AB$ có giá trị âm.	0,5
		$P = AB = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ . Nhận xét $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0; x \neq 4$ .	0,25
Với $x = 0$ thì $P = 0$ (loại) $P < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4$ (TMDKXD)		0,25	
Bài II 2,0 điểm	1)	Tính vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ nhà đến trường.	1,5
		Gọi vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ nhà đến trường là $x$ ( $km/h, x > 0$ ).	0,25
		Lập luận để có thời gian đạp xe của Khôi lúc đi từ nhà đến trường là $\frac{4}{x}$ (h). Lập luận để có vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ trường về nhà là $x+2$ ( $km/h$ ).	0,5

		Thời gian đạp xe của Khôi lúc đi từ trường về nhà là $\frac{4}{x+2}$ (h).	
		Lập luận để có phương trình $\frac{4}{x} + \frac{4}{x+2} = \frac{11}{15}$ .	0,25
		Giải phương trình tìm được $x = 10$ hoặc $x = \frac{-12}{11}$ .	0,25
		Đối chiếu điều kiện và thử lại: Vậy vận tốc đạp xe trung bình của Khôi lúc đi từ nhà đến trường là $10\text{km/h}$ .	0,25
		<b>Tính chiều cao của hình trụ.</b>	0,5
	2)	Gọi $h$ là chiều cao của khúc gỗ hình trụ. Theo công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ ta có: $S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi r}$	0,25
		Từ đó: $h = \frac{2400\pi}{2 \cdot 15 \cdot \pi} = 80(\text{cm})$ . Vậy chiều cao của hình trụ là $80\text{cm}$ .	0,25
Bài III 2,5 điểm	1)	<b>Giải hệ phương trình</b> $\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{y-5} = 2 \\ 3\sqrt{x-3} - 2\sqrt{y-5} = 1 \end{cases}$	1,0
		ĐKXD: $x \geq 3; y \geq 5$ .	0,25
		Đặt $\sqrt{x-3} = a; \sqrt{y-5} = b$ . Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a+b=2 \\ 3a-2b=1 \end{cases}$	0,25
		Giải hệ phương trình tìm được $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ . Hệ phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}=1 \\ \sqrt{y-5}=1 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ . Đối chiếu ĐKXD và kết luận: Tập nghiệm của hệ là $S = \{(4; 6)\}$ .	0,25
	2)	<b>a) Chứng minh với mọi giá trị của <math>m</math>, đường thẳng <math>(d)</math> luôn cắt parabol <math>(P)</math> tại hai điểm phân biệt có hoành độ <math>x_1, x_2</math>.</b>	0,75
		Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d)$ và parabol $(P)$ : $x^2 = mx + 3 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3 = 0$ (1).	0,25
		Ta có: $ac = 1 \cdot (-3) < 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ trái dấu.	0,25
		Vậy với mọi giá trị của $m$ , đường thẳng $(d)$ luôn cắt parabol $(P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2$ .	0,25
		<b>b) Tìm <math>m</math> để <math>x_1^2 = 4 - mx_2</math>.</b>	0,75
	Theo định lý Vi-et, có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$	0,25	
	Vì $x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình (1). Suy ra: $x_1^2 = mx_1 + 3$ .		

	<p>Ta có: <math>x_1^2 = 4 - mx_2 \Leftrightarrow mx_1 + 3 = 4 - mx_2</math>  <math>\Leftrightarrow m(x_1 + x_2) = 1</math></p>	0,25
	<p><math>\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1</math></p> <p>Vậy <math>m = \pm 1</math> thỏa mãn yêu cầu bài toán.</p>	0,25
<b>Bài IV</b> 3,0 điểm	<p>Từ điểm <math>M</math> cố định nằm ngoài đường tròn <math>(O)</math>, kẻ hai tiếp tuyến <math>MA, MB</math> với đường tròn <math>(O)</math> (<math>A, B</math> là hai tiếp điểm). Một đường thẳng <math>d</math> thay đổi đi qua <math>M</math>, cắt đường tròn <math>(O)</math> tại hai điểm <math>N, P</math> sao cho <math>MN &lt; MP</math>. Gọi <math>K</math> là trung điểm của <math>NP</math></p>	3
		0,25
	<p><b>Chứng minh năm điểm <math>A, M, B, O, K</math> cùng thuộc một đường tròn.</b></p>	1,25
	<p>Nêu được <math>MAO = 90^\circ, MBO = 90^\circ, OKM = 90^\circ</math></p>	0,25
	<p>Tứ giác <math>OKMB</math> có <math>OKM + MBO = 180^\circ</math> và <math>OKM, MBO</math> ở vị trí đối nhau.</p> <p>1) <math>\Rightarrow OKMB</math> là tứ giác nội tiếp.</p> <p>Suy ra: 4 điểm <math>O, K, M, B</math> cùng thuộc một đường tròn. (1)</p>	0,5
	<p>Chứng minh tương tự: <math>OAMB</math> là tứ giác nội tiếp.</p> <p>Suy ra: 4 điểm <math>O, A, M, B</math> cùng thuộc một đường tròn. (2)</p>	0,25
	<p>Từ (1) và (2) suy ra: 5 điểm <math>A, M, B, O, K</math> cùng thuộc một đường tròn.</p>	0,25
	<p><b>Chứng minh <math>KM</math> là tia phân giác của góc <math>AKB</math>.</b></p> <p><math>AKOM</math> là tứ giác nội tiếp nên <math>AKM = AOM</math> (3)</p>	0,25
	<p>Từ (1) suy ra: <math>BKM = BOM</math> (4)</p>	0,25
	<p>Mà <math>AOM = BOM</math> (5)</p>	0,25
	<p>Từ (3), (4), (5) suy ra: <math>AKM = BKM</math></p> <p>Dẫn tới <math>KM</math> là tia phân giác của góc <math>AKB</math>.</p>	0,25
	<p>3) <b>Tia <math>BK</math> cắt đường tròn <math>(O)</math> tại điểm thứ hai là <math>Q</math>. Xác định vị trí của đường thẳng <math>d</math> để diện tích tam giác <math>MPQ</math> đạt giá trị lớn nhất.</b></p>	0,5

		
	<p>Để chứng minh <math>\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \widehat{MOB} = \widehat{MKB}</math>, suy ra <math>AQ \parallel MP</math>.</p> <p><math>\Rightarrow S_{\Delta QMP} = S_{\Delta AMP} = \frac{1}{2} AM \cdot PJ</math>.</p> <p>(<math>J</math> là hình chiếu vuông góc của <math>P</math> lên <math>AM</math>)</p>	0,25
	<p><math>\Rightarrow S_{\Delta AMB}</math> đạt GTLN <math>\Leftrightarrow PJ_{\max}</math>.</p> <p>Với <math>P \in (O)</math>, điều này đạt được <math>\Leftrightarrow PJ = 2R \Leftrightarrow P \equiv P'</math> (<math>P'</math> đối xứng với <math>A</math> qua <math>O</math>)</p> <p>Vậy <math>S_{\Delta QMP \max} \Leftrightarrow P \equiv P'</math>. Tức là đường thẳng <math>d</math> đi qua <math>M</math> và <math>P'</math>.</p>	0,25
<p><b>Bài V</b> 0,5 điểm</p>	<p><b>Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức</b> <math>K = a\sqrt{3+bc} + b\sqrt{3+ac} + c\sqrt{3+ab}</math>.</p>	0,5
	<p>GTNN: Ta có: <math>a, b, c \geq 0</math>. Suy ra: <math>K = a\sqrt{3+bc} + b\sqrt{3+ac} + c\sqrt{3+ab} \geq a\sqrt{3} + b\sqrt{3} + c\sqrt{3} = (a+b+c)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}</math> <math>\text{Min} K = 3\sqrt{3}</math>, <math>K_{\min}</math> chẳng hạn khi <math>a=b=0, c=3</math>.</p>	0,25
	<p>GTLN: Ta có: <math>3 = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1</math>. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: <math>a\sqrt{3+bc} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{3a+abc} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4a+3a+abc}{2} = \frac{7a+abc}{4}</math> Chứng minh tương tự: <math>b\sqrt{3+ac} \leq \frac{7b+abc}{4}</math> <math>c\sqrt{3+ab} \leq \frac{7c+abc}{4}</math> Suy ra: <math>K \leq \frac{7(a+b+c)+3abc}{4} \leq \frac{7 \cdot 3 + 3}{4} = 6</math> <math>\text{Max} K = 6</math>, <math>K_{\max}</math> khi <math>a=b=c=1</math>.</p>	0,25

.....Hết.....