

## ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 04/3/2022

Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

**Bài 1 (5,0 điểm)**Cho  $a$  là một số thực không âm và dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi

$$u_1 = 6, u_{n+1} = \frac{2n+a}{n} + \sqrt{\frac{n+a}{n}u_n + 4}, \forall n \geq 1.$$

- Với  $a = 0$ , chứng minh rằng  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
- Với mọi  $a \geq 0$ , chứng minh rằng  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài 2 (5,0 điểm)**Tìm tất cả các hàm số  $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  thoả mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y), \forall x, y \in (0; +\infty).$$

**Bài 3 (5,0 điểm)**Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Các điểm  $E, F$  lần lượt thay đổi trên tia đối của các tia  $BA, CA$  sao cho  $BF = CE$  ( $E \neq B, F \neq C$ ). Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của  $BE, CF$  và  $D$  là giao điểm của  $BF$  với  $CE$ .

- Gọi  $I, J$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $DBE, DCF$ . Chứng minh rằng  $MN$  song song với  $IJ$ .
- Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$  và  $H$  là trực tâm của tam giác  $AEF$ . Chứng minh rằng  $HK$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 4 (5,0 điểm)**Với mỗi cặp số nguyên dương  $(n, m)$  thoả mãn  $n < m$ , gọi  $s(n, m)$  là số các số nguyên dương thuộc đoạn  $[n; m]$  và nguyên tố cùng nhau với  $m$ . Tìm tất cả các số nguyên dương  $m \geq 2$  thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- $\frac{s(n, m)}{m-n} \geq \frac{s(1, m)}{m}$  với mọi  $n = 1, 2, \dots, m-1$ ;
- $2022^m + 1$  chia hết cho  $m^2$ .

----- HẾT -----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

## ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 05/3/2022

Đề thi gồm 01 trang, 03 bài

**Bài 5 (6,0 điểm)**

Cho  $P(x)$  và  $Q(x)$  là hai đa thức khác hằng, có hệ số là các số nguyên không âm, trong đó các hệ số của  $P(x)$  đều không vượt quá 2021 và  $Q(x)$  có ít nhất một hệ số lớn hơn 2021.

Giả sử  $P(2022) = Q(2022)$  và  $P(x), Q(x)$  có chung nghiệm hữu tỷ  $\frac{p}{q} \neq 0$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$ ;  $p$  và  $q$  nguyên tố cùng nhau). Chứng minh rằng  $|p| + n|q| \leq Q(n) - P(n)$  với mọi  $n = 1, 2, \dots, 2021$ .

**Bài 6 (7,0 điểm)**

Gieo 4 con súc sắc cân đối, đồng chất. Ký hiệu  $x_i$  ( $1 \leq x_i \leq 6$ ) là số chấm trên mặt xuất hiện của con súc sắc thứ  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

- Tính số các bộ  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  có thể có.
- Tính xác suất để có một số trong  $x_1, x_2, x_3, x_4$  bằng tổng của ba số còn lại.
- Tính xác suất để có thể chia  $x_1, x_2, x_3, x_4$  thành hai nhóm có tổng bằng nhau.

**Bài 7 (7,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $B, C$  cố định trên đường tròn  $(O)$  ( $BC$  không đi qua tâm  $O$ ) và điểm  $A$  thay đổi trên cung lớn  $\widehat{BC}$  sao cho  $AB \neq AC$ . Đường tròn nội tiếp  $(I)$  của tam giác  $ABC$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $D$ . Gọi  $I_a$  là tâm đường tròn bàng tiếp góc  $\widehat{BAC}$ ,  $L$  là giao điểm của  $I_aD$  với  $OI$  và  $E$  là điểm trên  $(I)$  sao cho  $DE$  song song với  $AI$ .

- Đường thẳng  $LE$  cắt đường thẳng  $AI$  tại  $F$ . Chứng minh rằng  $AF = AI$ .
- Trên đường tròn  $(J)$  ngoại tiếp tam giác  $I_aBC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $I_aM$  song song với  $AD$ ,  $MD$  cắt lại  $(J)$  tại  $N$ . Chứng minh rằng trung điểm  $T$  của  $MN$  luôn thuộc một đường tròn cố định.

----- HẾT -----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM THI  
Đề thi chính thức

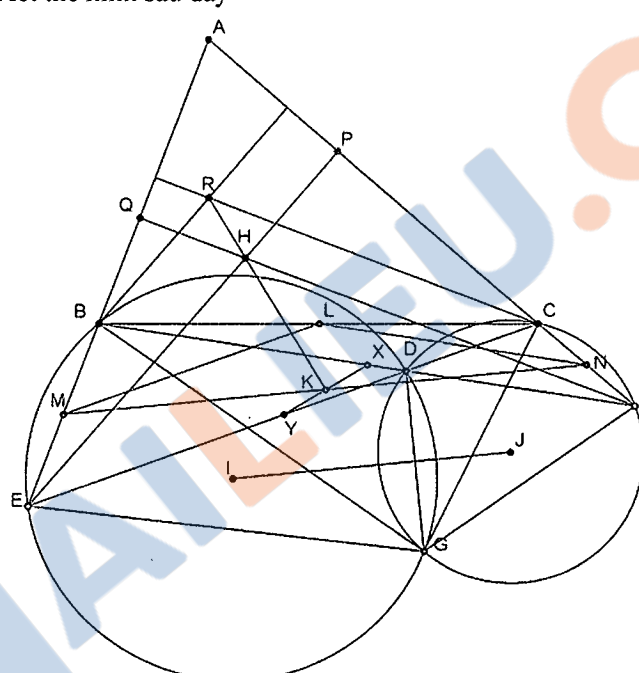
Môn: TOÁN  
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)  
Ngày thi: 04/3/2022 và 05/3/2022  
Hướng dẫn chấm thi gồm 06 trang

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng như đáp án, biểu điểm của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

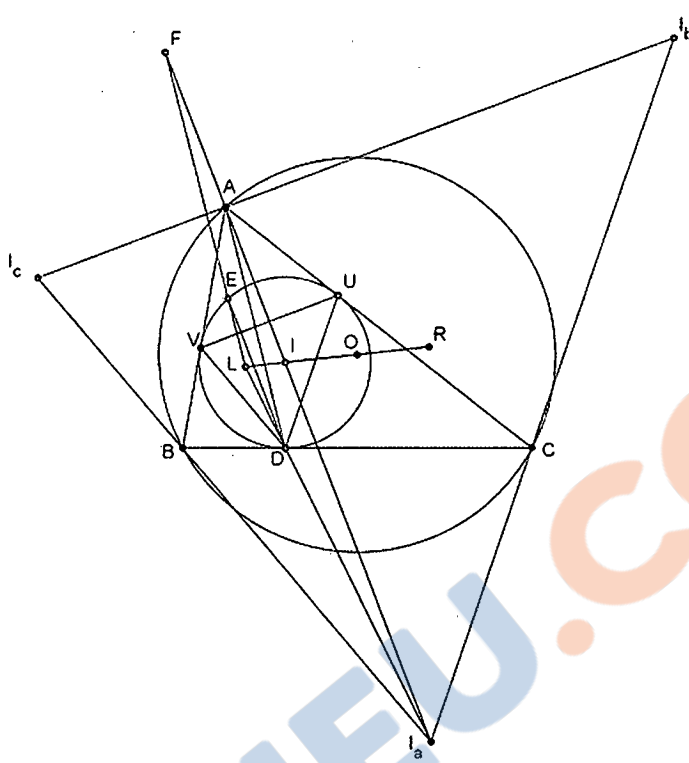
II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Đáp án	Thang điểm
1	a	<p>Với <math>a = 0</math>, ta có</p> $u_1 = 6, u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n + 4}, \quad n \geq 1. \quad (1)$ <p>Kiểm tra bằng phương pháp quy nạp rằng</p> $6 = u_1 \geq u_n \geq u_{n+1} \geq 4, \quad \forall n \geq 1.$ <p>Do đó <math>(u_n)</math> có giới hạn hữu hạn và <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \in [4, 6]</math>. Hơn nữa, từ (1) ta suy ra</p> $l = 2 + \sqrt{l + 4} \Rightarrow l = 5.$	2,00
	b	<p>Đặt <math>k_0 := [a] + 1 \in \mathbb{N}^*</math> và</p> $M := \max\{u_1, \dots, u_{k_0}, 8\} \geq 8.$ <p>Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng</p> $4 \leq u_n \leq M \quad (2)$ <p>với mọi <math>n \geq 1</math>. Thật vậy, rõ ràng <math>4 \leq u_n</math> với mọi <math>n \geq 1</math> và <math>u_n \leq M</math> với mọi <math>1 \leq n \leq k_0</math>. Giả sử (2) đúng tới <math>n = k \geq k_0</math>. Khi đó, vì <math>0 \leq a &lt; [a] + 1 = k_0 \leq k</math> và <math>M \geq 8</math> nên</p> $u_{k+1} = \frac{2k+a}{k} + \sqrt{\frac{k+a}{k}u_k + 4} \leq 3 + \sqrt{2M+4} \leq 3 + \sqrt{2M+9} \leq M.$ <p>Vậy (2) đúng với mọi <math>n \geq 1</math>. Tiếp theo ta xét hai trường hợp sau:</p> <p>Trường hợp 1: tồn tại <math>n_0 \geq 1</math> sao cho <math>u_{n_0} \geq u_{n_0+1}</math>. Khi đó, vì <math>\left(\frac{2n+a}{n}\right)_{n=1}^{\infty}</math> và <math>\left(\frac{n+a}{n}\right)_{n=1}^{\infty}</math> là hai dãy số giảm nên bằng phương pháp quy nạp, ta suy ra <math>u_n \geq u_{n+1}</math> với mọi <math>n \geq n_0</math>. Do đó, từ (2) ta suy ra <math>(u_n)</math> có giới hạn hữu hạn.</p> <p>Trường hợp 2: <math>u_n &lt; u_{n+1}</math> với mọi <math>n \geq 1</math>. Khi đó, từ (2) ta suy ra <math>(u_n)</math> có giới hạn hữu hạn.</p>	3,00
<b>Tổng điểm Bài 1</b>			<b>5,00</b>

2	<p>Bằng quy nạp ta có <math>f\left(n\frac{f(x)}{x} + y\right) = n + f(y)</math> với mọi <math>n \in \mathbb{Z}^+</math> và <math>x, y &gt; 0</math>.</p> <p>Giả sử tồn tại <math>z, t &gt; 0</math> để <math>\frac{f(z)}{z} &gt; \frac{f(t)}{t}</math>. Khi đó tồn tại <math>n, N</math> nguyên dương đủ lớn để</p> $N > f(1) \text{ và } n\left(\frac{f(z)}{z} - \frac{f(t)}{t}\right) + 1 > Nf(1) \Rightarrow n\frac{f(z)}{z} + 1 = n\frac{f(t)}{t} + Nf(1) + y$ <p>với <math>y &gt; 0</math>. Do đó</p> $n + f(1) = f\left(n\frac{f(z)}{z} + 1\right) = f\left(n\frac{f(t)}{t} + Nf(1) + y\right) = n + N + f(y) > n + f(1),$ <p>vô lý. Vậy <math>\frac{f(z)}{z} = \frac{f(t)}{t}, \forall z, t &gt; 0</math>. Suy ra <math>f(x) = kx, \forall x &gt; 0</math> (<math>k</math> là hằng số dương). Thử lại ta có <math>k = 1</math>, hay <math>f(x) = x</math> với mọi <math>x &gt; 0</math>.</p>	5,00
<b>Tổng điểm bài 2</b>		<b>5,00</b>
3	<p>a Xét thể hình sau đây</p>  <p>Gọi <math>L</math> là trung điểm <math>BC</math>. Vì <math>BF = CE</math> nên tam giác <math>LMN</math> cân tại <math>L</math>, do đó <math>MN</math> vuông góc với phân giác trong góc <math>\widehat{MLN}</math>. Để ý rằng phân giác trong các góc <math>\widehat{MLN}</math> và <math>\widehat{EDF}</math> song song với nhau (do các tia tạo góc tương ứng song song), suy ra <math>MN</math> vuông góc với phân giác trong góc <math>\widehat{EDF}</math>.</p> <p>Gọi <math>G</math> là giao điểm thứ hai của <math>(DBE), (DCF)</math>. Ta có <math>\triangle GBF = \triangle GEC</math> (g.c.g) <math>\Rightarrow GB = GE, GC = GF</math> nên <math>G</math> là trung điểm các cung <math>\widehat{BDE}, \widehat{CDF}</math>.</p> <p>Suy ra <math>DG</math> là phân giác trong góc <math>\widehat{EDF}</math>. Để ý rằng <math>DG</math> vuông góc đường nối tâm <math>IJ</math>. Vậy ta có <math>MN \parallel IJ</math>.</p>	2,00

	<p><b>b</b> Ký hiệu <math>X, Y</math> lần lượt là trung điểm của <math>BF, CE</math> và <math>(X), (Y)</math> tương ứng là các đường tròn đường kính <math>BF, CE</math>. Cho <math>EH, FH</math> cắt <math>AC, AB</math> tương ứng tại <math>P, Q</math>. Từ hệ thức <math>\overline{HE} \cdot \overline{HP} = \overline{HF} \cdot \overline{HQ} \Rightarrow P_{H/(X)} = P_{H/(Y)}</math> nên <math>H</math> thuộc trục đẳng phương <math>d</math> của <math>(X)</math> và <math>(Y)</math>. Để ý rằng <math>(X)</math> và <math>(Y)</math> có bán kính bằng nhau nên <math>d</math> chính là trung trực của <math>XY</math>, do đó <math>d</math> đi qua trung điểm của <math>XY</math>. Mặt khác <math>MXNY</math> là hình bình hành nên trung điểm của <math>XY</math> cũng là trung điểm <math>K</math> của <math>MN</math>, thành thử <math>d</math> chính là đường thẳng <math>HK</math>. Cuối cùng, gọi <math>R</math> là trực tâm <math>\triangle ABC</math>, lập luận tương tự như với điểm <math>H</math>, ta cũng có <math>P_{R/(X)} = P_{R/(Y)}</math> nên <math>R \in d</math>. Vậy <math>HK</math> luôn đi qua điểm <math>R</math> cố định.</p>	<p><b>3,00</b></p>
<b>Tổng điểm bài 3</b>		<b>5,00</b>
<p><b>4</b></p>	<p>Xét trường hợp <math>m</math> có nhiều hơn một ước nguyên tố <math>m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}</math> (<math>p_1 &lt; p_2 &lt; \cdots &lt; p_r; r &gt; 1</math>) thì chọn <math>n = m - p_1 p_2 \cdots p_r + p_1 &lt; m</math>. Vì <math>(m - k, m) = (k, m)</math> và <math>(k, m) = 1 \Leftrightarrow (k, p_1 p_2 \cdots p_r) = 1</math> nên ta có (với <math>\varphi(n)</math> là hàm Euler)</p> $\frac{s(n, m)}{m - n} = \frac{\varphi(p_1 p_2 \cdots p_r) - (p_1 - 1)}{p_1 p_2 \cdots p_r - p_1} = \frac{\prod (p_i - 1) - (p_1 - 1)}{\prod p_i - p_1}$ $< \frac{\prod (p_i - 1)}{\prod p_i} = \frac{\varphi(m)}{m} = \frac{s(1, m)}{m}.$ <p>Như vậy điều kiện <math>i</math>) không thỏa mãn.</p> <p>Do đó <math>m</math> có một ước nguyên tố, <math>m = p^\alpha</math>. Khi đó</p> $\frac{s(n, m)}{m - n} = \frac{m - n - \left\lfloor \frac{m - n}{p} \right\rfloor}{m - n} \geq \frac{m - n - \frac{m - n}{p}}{m - n} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{\varphi(m)}{m} = \frac{s(1, m)}{m}.$ <p>Vậy điều kiện <math>i</math>) thỏa mãn. Điều kiện <math>ii</math>) suy ra <math>(p, 2022) = 1</math>. Ta dễ có <math>2022^2 \equiv 2022^{(2^m, p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p \mid 2021 \cdot 2023</math>.</p> <p>Nếu <math>p \mid 2021 \Rightarrow 2 \mid p</math> (vô lý)</p> <p>Nếu <math>p \mid 2023</math> thì áp dụng LTE ta có <math>v_p(2023) + v_p(m) \geq 2v_p(m) \Rightarrow m \in \{7, 17, 17^2\}</math>.</p>	<p><b>5,00</b></p>
<b>Tổng điểm bài 4</b>		<b>5,00</b>
<p><b>5</b></p>	<p>Ta chứng minh <math>P(n) &lt; Q(n)</math> với mọi <math>n \in \{1, 2, \dots, 2021\}</math>.</p> <p>Đặt <math>Q(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0</math>. Gọi <math>i \in \{0, 1, \dots, m\}</math> là chỉ số nhỏ nhất để <math>a_i \geq 2022</math>. Ta xét phép biến đổi sau để được đa thức <math>Q_1(x)</math>:</p> <p>Viết <math>a_i = 2022h + r</math> (<math>h \geq 1, 0 \leq r &lt; 2022</math>). Đặt <math>b_i = r, b_{i+1} = a_{i+1} + h</math> và <math>b_k = a_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, m+1\} \setminus \{i, i+1\}</math> (ta quy ước <math>a_{m+1} = 0</math>).</p> <p>Đặt <math>Q_1(x) := b_{m+1} x^{m+1} + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0</math>.</p> <p>Ta kiểm tra được <math>Q_1(2022) = Q(2022)</math> và <math>Q_1(n) &lt; Q(n), \forall n = 1, 2, \dots, 2021</math>.</p> <p>Nếu <math>Q_1(x)</math> có hệ số <math>\geq 2022</math>, ta lại thực hiện phép biến đổi tương tự để được <math>Q_2(x)</math>, và cứ tiếp tục như thế. Do <math>\{Q_j(1)\}_{j \geq 1}</math> là dãy các số nguyên không âm,</p>	<p><b>6,00</b></p>

		<p>giảm thật sự nên sau hữu hạn phép biến đổi, ta phải có <math>Q_{j_0}(x)</math> với các hệ số không âm và <math>\leq 2021</math>.</p> <p>Ta có <math>Q_{j_0}(2022) = Q(2022) = P(2022)</math>. Viết <math>Q_{j_0}(2022)</math> và <math>P(2022)</math> theo hệ cơ số 2022, ta suy ra bộ hệ số của hai đa thức <math>Q_{j_0}</math> và <math>P</math> phải trùng nhau, hay <math>Q_{j_0}(x) \equiv P(x)</math>. Điều đó dẫn đến <math>P(n) = Q_{j_0}(n) &lt; Q(n), \forall n = 1, 2, \dots, 2021</math>.</p> <p>Mặt khác, để có <math>\frac{P}{q} &lt; 0</math> nên có thể giả sử <math>p &gt; 0, q &lt; 0 \Rightarrow  p  + n q  = p - nq</math>.</p> <p>Đề ý rằng <math>\frac{P}{q}</math> là nghiệm hữu tỷ <math>((p, q) = 1)</math> của <math>P(x)</math> thì <math>p   P(0)</math>.</p> <p>Xét <math>G(x) = P(x+n)</math> thì <math>\frac{p-nq}{q}</math> là nghiệm của <math>G(x) \Rightarrow p-nq   G(0) = P(n)</math>.</p> <p>Tương tự, <math>p-nq   Q(n)</math>. Suy ra <math>p-nq   Q(n) - P(n)</math> nên</p> $ p  + n q  \leq Q(n) - P(n), \forall n = 1, 2, \dots, 2021.$	
		<b>Tổng điểm bài 5</b>	<b>6,00</b>
<b>6</b>	<b>a</b>	Số bộ $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ có thể có là $6^4$ .	<b>1,00</b>
	<b>b</b>	<p>Ký hiệu <math>A_i</math> là tập hợp các bộ <math>(x_1, x_2, x_3, x_4)</math> sao cho <math>x_i</math> bằng tổng các số còn lại. Ta cần tính xác suất biến cố <math>A = \cup A_i</math>. Ta thấy <math> A_i </math> có số phần tử bằng nhau và là số nghiệm <math>\in \{1, 2, \dots, 6\}</math> của phương trình: <math>x_1 = x_2 + x_3 + x_4</math>.</p> <p>Chuyển về ta có <math>7 = x'_1 + x_2 + x_3 + x_4, x'_1 = 7 - x_1</math>. Số nghiệm nguyên dương của phương trình này theo công thức chia kẹo Euler là <math>C_6^3 = 20</math>.</p> <p>Để thấy <math>A_i \cap A_j = \emptyset</math>, cho nên <math> A  = \sum  A_i  = 80</math>.</p> <p>Xác suất cần tính là <math>\frac{80}{1296}</math>.</p>	<b>2,00</b>
	<b>c</b>	<p>Ký hiệu <math>B_i, i = 2, 3, 4</math> là tập hợp <math>(x_1, x_2, x_3, x_4)</math> sao cho <math>x_i + x_j</math> bằng tổng của hai số còn lại, chúng có số phần tử bằng nhau. Ta có <math> B_2 </math> là số nghiệm thuộc <math>\{1, 2, \dots, 6\}</math> của phương trình: <math>x_1 + x_2 = x_3 + x_4</math>, cũng là phương trình</p> $14 = x'_1 + x'_2 + x_3 + x_4, x'_1 = 7 - x_1, x'_2 = 7 - x_2.$ <p>Số nghiệm của nó theo công thức Euler là <math>C_{13}^3</math>. Để thấy phương trình trên có tối đa một ẩn nhận giá trị lớn hơn 6. Ta cần loại trừ nghiệm này. Chẳng hạn, khi <math>x'_1 \geq 7</math> ta đưa về phương trình về <math>8 = x''_1 + x'_2 + x_3 + x_4, x''_1 = x'_1 - 6</math>. Số các nghiệm theo công thức Euler là <math>C_7^3 = 35</math>. Vì có 4 trường hợp xảy ra với 4 biến, cho nên số nghiệm có ít nhất một ẩn nhận giá trị lớn hơn 6 là <math>4 \times 35 = 140</math>. Do đó <math> B_2  = 286 - 140 = 146</math>.</p> <p>Để thấy <math>B_i \cap B_j</math> có 36 phần tử, vì khi đó <math>x_i = x_k, x_i = x_j</math>. Tương tự <math> B_2 \cap B_3 \cap B_4  = 6</math> (khi đó cả 4 số phải bằng nhau). Đặt <math>B = \cup B_i</math> thì</p> $ B  =  \cup B_i  = 3 \times 146 - 3 \times 36 + 6 = 336.$	<b>4,00</b>

		Để thấy $A \cap B = \emptyset$ , nên $ A \cup B  = 80 + 336 = 416$ . Xác suất cần tìm là $\frac{26}{81}$	
		<b>Tổng điểm bài 6</b>	<b>7,00</b>
<b>7</b>	<b>a</b>	Xét thể hình sau đây	<b>3,00</b>
		 <p>Gọi <math>I_b, I_c</math> là tâm đường tròn bàng tiếp góc <math>\widehat{ABC}, \widehat{BCA}</math> và <math>U, V</math> lần lượt là tiếp điểm của <math>(I)</math> với <math>AC, AB</math>. Các tam giác <math>I_aI_bI_c</math> và <math>DUV</math> có các cạnh tương ứng song song nên chúng là ảnh của nhau qua một phép vị tự <math>H</math>.</p> <p>Gọi <math>R</math> là tâm đường tròn <math>(I_aI_bI_c)</math>. Do <math>I</math> là trực tâm và <math>O</math> là tâm đường tròn Euler của <math>\Delta I_aI_bI_c</math> nên <math>R, I, O</math> cùng thuộc một đường thẳng đi qua tâm vị tự của <math>H</math>. Đề ý rằng <math>I_aD</math> cũng đi qua tâm vị tự này nên <math>L</math> chính là tâm vị tự của <math>H</math>.</p> <p>Trong tam giác <math>DUV</math>, ta có <math>E</math> là giao của đường cao qua <math>D</math> với đường tròn <math>(I)</math> ngoại tiếp tam giác này nên <math>E</math> là điểm đối xứng với trực tâm <math>\Delta DUV</math> qua đường thẳng <math>UV</math>. Do <math>I_aA</math> là đường cao của <math>\Delta I_aI_bI_c</math> nên giao điểm <math>F</math> của <math>LE</math> với <math>I_aA</math> là ảnh của <math>E</math> qua phép vị tự <math>H</math>. Suy ra <math>F</math> đối xứng với trực tâm <math>I</math> của <math>\Delta I_aI_bI_c</math> qua <math>I_bI_c</math>, tức là <math>F</math> đối xứng với <math>I</math> qua <math>A</math>. Do đó <math>AF = AI</math>.</p>	
	<b>b</b>	Xét thể hình sau đây	<b>4,00</b>

