

Câu I: (5,0 điểm)

1. Thực hiện phép tính: $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$.

2. Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 5 = 11$. Tính $B = x - y + z + 2021$.

3. Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số

tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Câu II: (5,0 điểm)

1. Tìm x , biết: $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2013}{2015}$.

2. Cho $x, y, z \neq 0$ và $x - y - z = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right)$.

3. Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

Câu III: (4,0 điểm)

1. Tìm một số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

2. Tìm các số nguyên dương n và các số nguyên tố p sao cho $p = \frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Câu IV: (5,0 điểm)

Cho ΔABC có góc A nhọn hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ đoạn thẳng AM sao cho AM vuông góc với AB và $AM = AB$, trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ đoạn thẳng AN sao cho AN vuông góc với AC và $AN = AC$.

a) Chứng minh rằng: $\Delta AMC = \Delta ABN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Câu V: (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a và b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2014} + b^{2015}$.

----- Hết -----

Thí sinh không sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Câu	Nội dung	Điểm
I (5đ)	1. $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\left(\frac{2}{5} \cdot 5\right)^7 + \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^7 + 12^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^6(2+3^3)}{2^7(5^2+2^2)} = \frac{1}{2}$	2.0
	2. Ta có: $2x^3 - 5 = 11 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ Do đó: $\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = 2$ $\Rightarrow y = 16 \cdot 2 + 25 = 57; z = 25 \cdot 2 - 9 = 41$ Vậy $B = 2 - 57 + 41 + 2021 = 2007$.	0,5 0,75 0,25
	3. + Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}; \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}; \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$ $\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$ + Có $M^{10} < 2^{10}$ (Vì $M > 0$) mà $2^{10} = 1024 < 1025$ Vậy $M^{10} < 1025$	0.5 0,5 0,25 0.25
II (5đ)	1. $\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2013}{2015}$ $\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2013}{2015}$ $\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2013}{2015} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{2013}{2015} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2015} \Rightarrow x = 2014$.	1,0 1.0
	2. Ta có: $P = \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) = \frac{x-z}{x} \cdot \frac{y-x}{y} \cdot \frac{z+y}{z}$ Từ $x - y - z = 0 \Rightarrow x - z = y; y - x = -z; z + y = x$ Suy ra: $P = \frac{y}{x} \cdot \frac{-z}{y} \cdot \frac{x}{z} = -1$ (vì $x, y, z \neq 0$)	0,5 0,5 0,5
	3. Ta có: $\frac{7n-8}{2n-3} = \frac{2(7n-8)}{2(2n-3)} = \frac{7(2n-3)+5}{2(2n-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n-3)}$ Phân số đã cho có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{5}{2(2n-3)}$ lớn nhất. Từ đó suy ra: $2n-3=1 \Rightarrow n=2$. Vậy giá trị lớn nhất của phân số đã cho bằng 6 khi $n=2$.	0,5 0,5 0,5
III (4,0đ)		

	<p>1. Theo bài toán ta có: $N = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b)$ Đề N là một số chính phương ta phải có: $100a + b = 99a + (a + b) = 11t^2 (t \in \mathbb{N})$ Mà $99a : 11$ nên $a + b : 11 \Rightarrow a + b = 11$. Vậy $99a + 11 = 11(9a + 1) = 11t^2 \Rightarrow 9a + 1 = t^2$ (1) Cho a từ 1 đến 9 chỉ có $a = 7$ thỏa mãn (1); Từ đó suy ra $b = 4$. Số phải tìm là $7744 = 88^2$</p>	<p>1,0 1,0 0,5</p>
	<p>2. Với $n = 1$ thì $p = 0$, không là số nguyên tố. Với $n = 2$ thì $p = 2$, là số nguyên tố. Với $n = 3$ thì $p = 5$, là số nguyên tố. Với $n \geq 4$, ta viết p dưới dạng: $p = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Ta xét hai trường hợp: • Nếu n lẻ ($n \geq 5$) thì $p = \frac{(n-1)}{2} \cdot (n+2)$, là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên p là hợp số. • Nếu n chẵn ($n \geq 4$) thì $p = (n-1) \cdot \frac{(n+2)}{2}$, là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên p là hợp số. Đáp số: $n = 2; p = 2$ và $n = 3; p = 5$.</p>	<p>0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25</p>
<p>IV (5,0đ)</p>	<div style="text-align: center;"> </div> <p>a) (2đ) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có: $AM = AB$ (gt) $AC = AN$ (gt) $\angle MAC = \angle NAC (= 90^\circ + \angle BAC)$ Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)</p> <p>b) (2đ) Gọi I là giao điểm của BN với AC, K là giao điểm của BN với MC. Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$, có: $\angle ANI = \angle KCI$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$) $\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle IKC = \angle NAI = 90^\circ$, do đó: $MC \perp BN$</p>	<p>2,0 1,5 0,5</p>

	<p>c) (1đ) Kẻ $ME \perp AH$ tại E, $NF \perp AH$ tại F. Gọi D là giao điểm của MN và AH. - Ta có: $\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ$ (vì $\angle MAB = 90^\circ$) Lại có $\angle MAE + \angle AME = 90^\circ$, nên $\angle AME = \angle BAH$ Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$, vuông tại E và H, có: $\angle AME = \angle BAH$ (chứng minh trên) $MA = AB$ Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow ME = AH$ - Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA$ $\Rightarrow FN = AH$ Xét $\triangle MED$ và $\triangle NFD$, vuông tại E và F, có: $ME = NF (= AH)$ $\angle EMD = \angle FND$ (phụ với $\angle MDE$ và $\angle FDN$, mà $\angle MDE = \angle FDN$) $\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD \Rightarrow BD = ND$. Vậy AH đi qua trung điểm của MN.</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p>
<p>V (1,5đ)</p>	<p>Ta có đẳng thức: $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101})(a + b) - ab(a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b. Kết hợp với: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$ Suy ra: $1 = (a + b) - ab \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0$. $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow 1 + b^{100} = 1 + b^{101} = 1 + b^{102} \Rightarrow b = 1 \\ b = 1 \Rightarrow 1 + a^{100} = 1 + a^{101} = 1 + a^{102} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$ Do đó $P = a^{2014} + b^{2015} = 1^{2014} + 1^{2015} = 2$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0.25</p>

Chú ý:

1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.
2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.