

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay!

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $\frac{10.11+50.55+70.77}{11.12+55.60+77.84}$

b) Tìm số tự nhiên x , biết: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

c) Tìm hiệu $a - b$, biết rằng:

$$a = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 \text{ và } b = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2$$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{100}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng: $4.A + 5 = 5^n$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ có thể rút gọn được.

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p^{2016} + 2018$ là số nguyên tố hay hợp số?

c) Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó gấp đôi tích các chữ số của nó.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hai góc $\widehat{AOx} = 38^\circ$ và $\widehat{BOx} = 112^\circ$. Biết rằng \widehat{AOx} và \widehat{BOx} **không kề nhau**.

a) Trong ba tia OA, OB, Ox tia nào nằm giữa hai tia còn lại? Vì sao?

b) Tính số đo góc AOB.

c) Vẽ tia phân giác OM của góc AOB. Tính số đo góc MOx.

d) Nếu $\widehat{AOx} = \alpha$; $\widehat{BOx} = \beta$, trong đó $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$ và $\alpha \neq \beta$. Tìm điều kiện liên hệ giữa α và β để tia OA nằm giữa hai tia OB và Ox. Tính số đo \widehat{MOx} theo α và β .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho 100 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng ta có thể chọn được ít nhất 15 số mà hiệu của hai số tùy ý chia hết cho 7.

————— Hết —————

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Nội dung	Điểm	
1	a Ta có: $\frac{10.11+50.55+70.77}{11.12+55.60+77.84} = \frac{10.11(1+5.5+7.7)}{11.12(1+5.5+7.7)} = \frac{5}{6}$	2,0	
	b Ta có: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} = \underbrace{1000\dots 0}_{18\text{c/số}0} : 2^{18} \Rightarrow 5^{x+x+1+x+2} = 10^{18} : 2^{18}$	0,5	
		$\Rightarrow 5^{3x+3} = \frac{10^{18}}{2^{18}} = \left(\frac{10}{2} \cdot \frac{10}{2} \dots \frac{10}{2}\right)^{18} = 5^{18}$	0,5
		$\Rightarrow 3x+3=18 \Rightarrow x=5$	0,5
	c Ta có: $a = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$	$= 1.(1+1) + 2.(1+2) + 3.(1+3) + \dots + 98.(1+98)$	0,25
		$= 1 + 1^2 + 2 + 2^2 + 3 + 3^2 + \dots + 98 + 98^2$	0,25
		$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 98)$	0,25
		$= b + (1 + 2 + 3 + \dots + 98)$	0,25
		$= b + (1 + 98).98 : 2 = b + 4851$	0,25
		Vậy $a - b = 4851$	0,25
a	Ta có: $5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{101}$.	0,5	
	$5A - A = (5^2 + 5^3 + \dots + 5^{101}) - (5 + 5^2 + \dots + 5^{100}) = 5^{101} - 5$	0,5	
	$\Rightarrow 4A + 5 = 5^{101}$	0,25	
	Lại có: $4.A + 5 = 5^n \Rightarrow 5^n = 5^{101}$. Vậy $n = 101$	0,25	
2	Giả sử $18n + 3$ và $21n + 7$ cùng chia hết cho số nguyên tố d	0,25	
	Khi đó: $18n + 3 : d$ và $21n + 7 : d \Rightarrow 6(21n + 7) - 7(18n + 3) : d$ $\Rightarrow 21 : d \Rightarrow d \in U(21) = \{3; 7\}$	0,25	
	b+) Nếu $d = 3$ không xảy ra vì $21n + 7$ không chia hết cho 3.	0,25	
	+) Nếu $d = 7$ khi đó, để phân số có thể rút gọn được thì: $18n + 3 : 7$ (vì $21n + 7 : 7$) $\Rightarrow 18n + 3 - 21 : 7$ $\Rightarrow 18(n - 1) : 7$ mà $(18; 7) = 1 \Rightarrow n - 1 : 7 \Rightarrow n = 7k + 1$ ($k \in N$)	0,5	
	Vậy để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ có thể rút gọn được thì $n = 7k + 1$ ($k \in N$)	0,25	

3	a	Gọi số cần tìm là a với ($a \in N^*$), ta có: $(a - 6) : 11$; $(a - 1) : 4$ và $(a - 11) : 19$.	0,5
		Ta có: $(a - 6 + 33) : 11 \Rightarrow (a + 27) : 11$ $(a - 1 + 28) : 4 \Rightarrow (a + 27) : 4$ $(a - 11 + 38) : 19 \Rightarrow (a + 27) : 19$	0,5
		Do a là số tự nhiên nhỏ nhất nên $a + 27$ nhỏ nhất Suy ra: $a + 27 = \text{BCNN}(4 ; 11 ; 19) = 836$	0,5
		Từ đó tìm được: $a = 809$	0,5
	b	Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia cho 3 dư 1 hoặc p chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow p^2$ chia cho 3 dư 1	0,5
		Mà $p^{2016} = (p^2)^{1008}$ nên p^{2016} chia cho 3 dư 1	0,5
		Mặt khác: 2018 chia cho 3 dư 2, do đó $(p^{2016} + 2018) : 3$	0,25
		Vì $(p^{2016} + 2018) : 3$ và $(p^{2016} + 2018) > 3$ nên $p^{2016} + 2018$ là hợp số.	0,25
	c	Gọi số tự nhiên phải tìm là \overline{ab} với $a, b \in N, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$	0,25
		Theo đề bài, ta có: $10a + b = 2ab \Rightarrow 10a = 2ab - b \Rightarrow 10a = b(2a - 1)$	0,25
		$\Rightarrow 10a : 2a - 1$ mà $(a; 2a - 1) = 1$ nên $10 : 2a - 1$	0,5
		Vì $2a - 1$ lẻ nên $2a - 1 = 1$ hoặc $2a - 1 = 5$	
+) Nếu $2a - 1 = 1$ thì $a = 1 \Rightarrow b = 10$ (loại)		0,25	
+) Nếu $2a - 1 = 5$ thì $a = 3 \Rightarrow b = 6$ (t/m)			
Vậy số cần tìm là 36	0,25		
4	Ta có hình vẽ:		
	a	Do \widehat{AOx} và \widehat{BOx} là hai góc không kề nhau mà có chung cạnh Ox nên hai tia OA và OB cùng nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ chứa tia Ox.	1,0
		Mà $\widehat{AOx} < \widehat{BOx}$ (vì $38^\circ < 112^\circ$) nên tia OA nằm giữa hai tia OB và Ox	1,0
	b	Do OA nằm giữa hai tia OB và Ox nên ta có: $\widehat{AOx} + \widehat{AOB} = \widehat{BOx}$	0,75
		$\Rightarrow 38^\circ + \widehat{AOB} = 112^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 74^\circ$	0,75

c	Do OM là phân giác của góc AOB nên: $\widehat{AOM} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 74^\circ = 37^\circ$.	0,5
	Do tia OA nằm giữa hai tia OB và Ox; tia OM nằm giữa hai tia OA và OB (OM là tia phân giác của \widehat{AOB}) nên tia OA nằm giữa hai tia OM và Ox.	0,5
	$\Rightarrow \widehat{MOx} = \widehat{AOM} + \widehat{AOx} = 37^\circ + 38^\circ = 75^\circ$	0,5
d	Có OA và OB cùng nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox nên để tia OA nằm giữa hai tia OB và Ox thì $\alpha < \beta$.	0,25
	Thật vậy, nếu $\alpha > \beta$ thì $\widehat{AOx} > \widehat{BOx} \Rightarrow$ tia OB nằm giữa hai tia OA và Ox	0,25
	Nếu $\alpha = \beta$ thì $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} \Rightarrow$ tia OB trùng với tia OA.	
	Với $\alpha < \beta$ ta có: $\widehat{AOx} + \widehat{AOB} = \widehat{BOx} \Rightarrow \widehat{AOB} + \alpha = \beta$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{AOB} = \beta - \alpha \Rightarrow \widehat{AOM} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot (\beta - \alpha)$	
Vậy: $\widehat{MOx} = \widehat{AOM} + \widehat{AOx} = \frac{1}{2} \cdot (\beta - \alpha) + \alpha = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$	0,25	
5	Ta có 100 số khi đem chia cho 7 thì các số dư nhận nhiều nhất là 7 giá trị khác nhau.	0,5
	Vì $100 = 7 \cdot 14 + 2$ nên theo nguyên lý Dirichlet ta sẽ tìm được 15 số mà khi chia cho 7 có cùng số dư.	0,25
	Vậy hiệu của hai số tùy ý trong 15 số này thì chia hết cho 7.	0,25

*** Lưu ý:**

- Nếu học sinh làm bài theo cách khác hướng dẫn chấm mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa của bài đó.

- Đối với bài hình học, nếu học sinh vẽ sai hình hoặc không vẽ hình thì không được tính điểm.