

Bài 1 (5,0 điểm).

Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a, -1 < a \neq 3 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 15}{2(x_n + 1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(2x + f(y) + xf(y)) = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường trung tuyến AM của tam giác ABC cắt (O) tại D (D khác A). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BD, DC, CA . Gọi S, T lần lượt là chân đường phân giác trong góc M của các tam giác EMG và FMH . Các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại X, AC và BD cắt nhau tại Y .

a) Chứng minh rằng $MS \perp MT$.

b) Các đường thẳng MS và FH cắt nhau tại U, MT và EG cắt nhau tại V . Chứng minh rằng $UV \parallel XY$.

Bài 4 (5,0 điểm).

a) Cho số nguyên dương d , tìm số cặp (x, y) nguyên dương sao cho $\frac{xy}{x-y} = d$.

b) Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, gọi $f(n)$ là số cặp (x, y) nguyên dương sao cho $\frac{xy}{x-y}$ là ước nguyên dương của n . Tìm tất cả các giá trị của n để $f(n) = 231$.

Bài 5 (6,0 điểm).

Cho dãy các đa thức $(P_n(x))$ xác định bởi $P_1(x) = 3x$, $P_2(x) = 5x^2 + 2x + 2$ và

$$P_{n+2}(x) = 3xP_{n+1}(x) - (2x^2 - x - 1)P_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm tất cả các giá trị n sao cho đa thức $P_n(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^3 + x^2 + x$.

Bài 6 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có trực tâm H và đường cao AD . Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng AD và đường tròn đường kính BC . Trên các đoạn CH , BH lần lượt lấy các các điểm R , S sao cho $BK = BR$ và $CK = CS$. Gọi X là giao điểm của BR và CS .

- Chứng minh rằng $AX \perp RS$ và đường thẳng SR đi qua tâm vị tự ngoài của hai đường tròn tâm B , bán kính BK và tâm C , bán kính CK .
- Gọi T là giao điểm của HX và BC . Chứng minh rằng bốn điểm S , D , T , R cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 7 (7,0 điểm).

Cho số nguyên dương $n \geq 3$. Gọi $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ và A_i với $1 \leq i \leq m$ là các tập con khác nhau và gồm ít nhất hai phần tử của S sao cho nếu

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \quad A_j \cap A_k \neq \emptyset, \quad A_k \cap A_i \neq \emptyset$$

với i, j, k đôi một phân biệt, $1 \leq i, j, k \leq m$ thì $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset$.

- Khi $n = 5$, hãy chỉ ra có thể xây dựng $m = 15$ tập hợp A_1, A_2, \dots, A_{15} thoả mãn yêu cầu.
- Tìm giá trị lớn nhất của m .