

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH YÊN BÁI

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT
CẤP TỈNH NĂM HỌC 2021 - 2022

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 07 câu, gồm 01 trang)

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** (không kể giao đề)
Ngày thi: **28/9/2021**.

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -x - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$.

2) Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^2 + m - 1|$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 18.

Câu 2. (2,0 điểm)

Một nhóm học sinh gồm 10 em trong đó có 2 học sinh lớp 11A1, 3 học sinh lớp 12A2 và 5 học sinh lớp 12A1. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh đó thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

Câu 3. (4,0 điểm)

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực

$$\begin{cases} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)(3y + \sqrt{9y^2 + 1}) = 1 \\ 3\sqrt{x + 2y - 2} + x\sqrt{x - 2y + 6} = 10 \end{cases}$$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SA = 2a, BD = \sqrt{3}AC$, mặt bên SAB là tam giác cân tại A , hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AO .

- 1) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
- 2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , M là trung điểm của cạnh BC . Đường phân giác trong của BAC cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm P (P khác A). Gọi E là điểm đối xứng với D qua M ; trên đường thẳng AO và đường thẳng AD lần lượt lấy các điểm H, F sao cho các đường thẳng HD, FE cùng vuông góc với đường thẳng BC .

- 1) Gọi K là giao điểm của PE và DH . Chứng minh rằng $BHCK$ là tứ giác nội tiếp và bốn điểm B, H, C, F cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Gọi (ω) là đường tròn qua bốn điểm B, H, C, F và T là giao điểm khác F của AD và (ω) . Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác MTP cắt đường thẳng TH tại điểm thứ hai Q (Q khác T). Chứng minh rằng đường thẳng QA tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}$.

Câu 7. (1,0 điểm)

Xác định tất cả các số nguyên dương $n \geq 2$ thỏa mãn $n = a^2 + b^2$, trong đó a là ước nguyên tố nhỏ nhất của n và b là một ước nguyên dương của n .