SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn thi: **TOÁN – BẢNG A**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

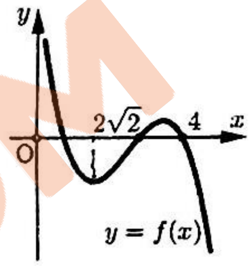
Câu 1 (7,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=x^6-5x^3+mx+2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^4-16y^2+15=2x\left(3y^2-4x-17\right) \\ \left(y^2+2x-15\right)\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{y^2+x+3}\right)=14 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)\right]^2$.



b) Trong quá trình truy vết lịch sử tiếp xúc của bệnh nhân Covid-19 ở một trường học, trung tâm y tế xác định được 3 giáo viên và một số học sinh có sự liên quan đến bệnh nhân đó. Người ta chọn ngẫu nhiên 10 người trong số các giáo viên và học sinh liên quan để làm xét nghiệm gộp. Biết rằng xác suất để trong 10 người được chọn có 3 giáo viên bằng 6 lần xác suất trong 10 người được chọn đều là học sinh. Tính xác suất để trong 10 người được chọn làm xét nghiệm có nhiều nhất 2 giáo viên.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}=5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a^3+b^3+c^3$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{ABC}=60^0$ và $B_1A\perp(ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (B_1CD) và $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng α, với $\cot\alpha=\frac{1}{2}$. Gọi M là trung điểm của CD, E là trung điểm của B_1M.

a) Tính thể tích khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

b) Gọi F là điểm thuộc đường thẳng DD_1 sao cho $EF\perp AC$. Tính độ dài đoạn EF và cosin góc giữa hai mặt phẳng (AEM) và (AEF).

Câu 5 (1,5 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M nằm trong tứ diện. Qua M dựng các mặt phẳng $(\alpha)//(BCD)$, $(\beta)//(ACD)$, $(\gamma)//(ABD)$ và $(\mu)//(ABC)$. Biết (α) cắt AB tại E, (β) cắt BC tại F, (γ) cắt CD tại P, (μ) cắt AD tại Q. Chứng minh $\sqrt{\frac{EA}{EB}}+\sqrt{\frac{FB}{FC}}+\sqrt{\frac{PC}{PD}}+\sqrt{\frac{QD}{QA}}\geq 4\sqrt{3}$.

……………… **Hết** ………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn thi: **TOÁN – BẢNG B**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

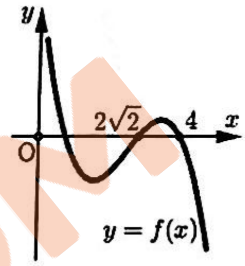
Câu 1 (7,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+1=2\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+1}-x\right) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y-3}+x-y=2 \end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)$.



b) Trong quá trình truy vết lịch sử tiếp xúc của bệnh nhân Covid-19 ở một trường học, trung tâm y tế xác định được 3 giáo viên và 13 học sinh có sự liên quan đến bệnh nhân đó. Người ta chọn ngẫu nhiên 10 người trong số giáo viên và học sinh liên quan để làm xét nghiệm gộp. Tính xác suất để trong 10 người được chọn làm xét nghiệm có nhiều nhất 2 giáo viên.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}=5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a^3+b^3+c^3$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{ABC}=60^0$ và $B_1A\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm CD, góc giữa đường thẳng B_1M và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng α, với $\cot\alpha=\frac{1}{2}$.

a) Tính thể tích khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1M và A_1C_1.

Câu 5 (1,5 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M nằm trong tứ diện. Qua M dựng các mặt phẳng $(\alpha)//(BCD), (\beta)//(ACD), (\gamma)//(ABD)$ và $(\mu)//(ABC)$. Biết (α) cắt AB tại E, (β) cắt BC tại F, (γ) cắt CD tại P, (μ) cắt AD tại Q. Chứng minh $\sqrt{\frac{EA}{EB}}+\sqrt{\frac{FB}{FC}}+\sqrt{\frac{PC}{PD}}+\sqrt{\frac{QD}{QA}}\geq 4\sqrt{3}$.

……………Hết……………

Họ và tên thí sinh…………………………………… *Số báo danh……………………*

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM 2021-2022

Câu 1: (7,0 điểm)

a, Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x) = x^6 - 5x^3 + mx + 2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Giải:

Ta có: $y' = 6x^5 - 15x^2 + m$.

Để hàm số đồng y đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $y' \geq 0$ với $\forall x \in (0;+\infty)$

Hay $m \geq h(x) = -6x^5 + 15x^2$ với $\forall x \in (0;+\infty)$ $\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} h(x)$

Xét hàm số $h(x) = -6x^5 + 15x^2$ trên $(0;+\infty)$ có $h'(x) = -30x^4 + 30x^2$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0(ktm) \\ x = -1(ktm) \\ x = 1(tm) \end{array}\right.$$

Ta có $h(0) = 0; h(1) = 9; \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty \Rightarrow \max\limits_{(0;+\infty)} h(x) = 9$

Vậy với $m \geq 9$ thì hàm số $y = f(x) = x^6 - 5x^3 + mx + 2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

b, Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^4 - 16y^2 + 15 = 2x(3y^2 - 4x - 17) \\ (y^2 + 2x - 15)\left(\sqrt{5x+1} - \sqrt{y^2 + x + 3}\right) = 14 \end{cases}$

Giải:

ĐKXĐ: $x \geq \dfrac{-1}{5}$

$$y^4-16y^2+15=2x(3y^2-4x-17)$$
$$\Leftrightarrow y^4-2y^2(3x+8)+8x^2+14x+35=0$$
$$\Leftrightarrow (y^2-2x-1)(y^2-4x-15)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=2x+1 \\ y^2=4x+15 \end{array}\right.$$

+) Với $y^2=4x+15$ thay vào phương trình còn lại, ta được:

$$6x\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{5x+18}\right)=14 \Leftrightarrow 6x.\frac{-17}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+18}}$$
$$\Leftrightarrow 7\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+18}\right)+51x=0(*)$$

Vì $x\geq\frac{-1}{5}$ nên ta có $VT(*)\geq 7\left(\sqrt{5.\frac{-1}{5}+1}+\sqrt{5.\frac{-1}{5}+18}\right)+51.\frac{-1}{5}>0$

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm

+) Với $y^2=2x+1$ thay vào phương trình còn lại, ta được:

$$(4x-14)\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+4}\right)=14 \Leftrightarrow (2x-7)\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+4}\right)=7$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2x-7)(2x-3)}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+4}}=7 \Leftrightarrow 7\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+4}\right)-(2x-7)(2x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{245x+49}-(5x+7)\right]-\left[\sqrt{147x+196}-(3x+14)\right]-4x^2+28=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{175x-25x^2}{\sqrt{245x+49}+(5x+7)}+\frac{63x-9x^2}{\sqrt{147x+196}+(3x+14)}-4x^2+28x=0$$
$$\Leftrightarrow -x(x-7)\left[\frac{25}{\sqrt{245x+49}+(5x+7)}+\frac{9}{\sqrt{147x+196}+(3x+14)}+4\right]=0(**)$$

Vì $x\geq\frac{-1}{5}$ nên $\frac{25}{\sqrt{245x+49}+(5x+7)}+\frac{9}{\sqrt{147x+196}+(3x+14)}+4>0$

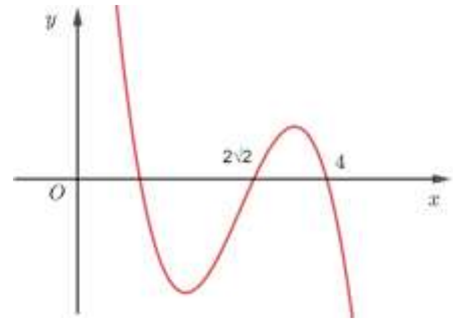
Nên $(**)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=7 \end{array}\right.$

Với $x=0\Rightarrow y=\pm 1$

Với $x=7\Rightarrow y=\pm\sqrt{15}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình $(x;y)\in\left\{(0;1);(0;-1);\left(7;\sqrt{15}\right);\left(7;-\sqrt{15}\right)\right\}$

Câu 2:(4,0 điểm)



a, Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)\right]^2$

Giải:

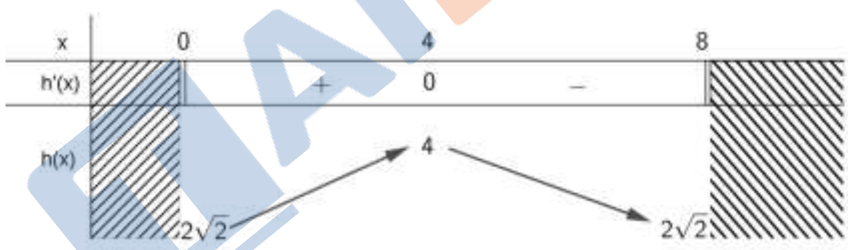
Điều kiện: $0\le x\le 8$

Ta có: $g'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{8-x}}\right)f'\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right).f\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{8-x}}\right)=0\\ f'\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)=0\\ f\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ \sqrt{x}+\sqrt{8-x}=a\in\left(0;2\sqrt{2}\right)(1)\\ \sqrt{x}+\sqrt{8-x}=b\in\left(2\sqrt{2};4\right)(2)\\ \sqrt{x}+\sqrt{8-x}=2\sqrt{2}(3)\\ \sqrt{x}+\sqrt{8-x}=4(4)\\ \sqrt{x}+\sqrt{8-x}=t<2\sqrt{2}(5)\end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$ trên $[0;8]$ có $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{8-x}};h'(x)=0\Leftrightarrow x=4$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có

+)Phương trình (1); (5) vô nghiệm

+) $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=c\in(0;4)\\ x=d\in(4;8)\end{array}\right.$

+) $(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=8\end{array}\right.$

+) $(4)\Leftrightarrow x=4(kep)$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ với $0 \le x \le 8$

x	0		c		4		d		8
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị

b, Trong quá trình truy vết lịch sử tiếp xúc của bệnh nhân Covid-19 ở một trường học, trung tâm y tế xác định được 3 giáo viên và một số học sinh có sự liên quan đến bệnh nhân đó. Người ta chọn ngẫu nhiên 10 người trong số các giáo viên và học sinh liên quan để làm xét nghiệm gộp. Biết rằng xác suất để trong 10 người được chọn có 3 giáo viên bằng 6 lần xác suất trong 10 người được chọn đều là học sinh. Tính xác suất để trong 10 người được chọn làm xét nghiệm có nhiều nhất 2 giáo viên.

Giải:

Gọi số học sinh liên quan đến bệnh nhân Covid -19 là $n\left(n \ge 10\right)$

Ta có: $n\left(\Omega\right) = C_{n+3}^{10}$

Xác suất để chọn 10 người trong đó có 3 giáo viên bằng $\dfrac{C_3^3.C_n^7}{C_{n+3}^{10}} = \dfrac{C_n^7}{C_{n+3}^{10}}$

Xác suất để chọn 10 người đều là học sinh là $\dfrac{C_n^{10}}{C_{n+3}^{10}}$

$$\frac{C_n^7}{C_{n+3}^{10}} = 6.\frac{C_n^{10}}{C_{n+3}^{10}} \Rightarrow C_n^7 = 6.C_n^{10} \Rightarrow \frac{n!}{7!(n-7)!} = 6.\frac{n!}{10!(n-10)!}$$

Theo bài ra ta có: $\Rightarrow \dfrac{1}{(n-7)(n-8)(n-9)} = \dfrac{6}{8.9.10} \Leftrightarrow (n-7)(n-8)(n-9) = 120 = 6.5.4$

$\Rightarrow n = 13$

Vậy xác suất để trong 10 người có nhiều nhất 2 giáo viên là $P = 1 - \dfrac{C_{13}^7}{C_{16}^{10}} = \dfrac{11}{14}$

Câu 3:(1,5 điểm) Cho a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c} = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a^3 + b^3 + c^3$

Giải:

Trước tiên, ta xét bài toán phụ sau:

Cho hai số thực x, y không âm. Chứng minh $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}\ge 1+\sqrt{1+2(x+y)}$

- Chứng minh: Vì x, y không âm nên ta có: $xy\ge 0$

$$\Rightarrow (1+2x)(1+2y)\ge 1+2(x+y)\Rightarrow (1+2x)+(1+2y)+2\sqrt{(1+2x)(1+2y)}\ge 1+2(x+y)+2\sqrt{1+2(x+y)}+1$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}\right)^2\ge \left(1+\sqrt{1+2(x+y)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}\ge 1+\sqrt{1+2(x+y)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$

Quay trở lại bài toán, ta có:

$$5=\sqrt{1+a^2}+\left(\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}\right)\ge \sqrt{1+a^2}+1+\sqrt{1+2(b+c)}$$

$$\Rightarrow 4\ge \sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2(b+c)}\ge 1+\sqrt{1+a^2+2(b+c)}$$

$$\Rightarrow a^2+2b+2c\le 8\Rightarrow b+c\le \frac{8-a^2}{2}$$

Vì $b+c\ge 0\Rightarrow \frac{8-a^2}{2}\ge 0\Rightarrow 0\le a\le 2\sqrt{2}$

Ta có: $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)\le (b+c)^3$ vì $bc\ge 0$

$$\Rightarrow P\le 2a^3+(b+c)^3\le 2a^3+\left(\frac{8-a^2}{2}\right)^3$$

Xét hàm số $f(a)=2a^3+\left(\frac{8-a^2}{2}\right)^3$ trên $\left[0;2\sqrt{2}\right]$ có:

$$f'(a)=6a^2-3a\left(4-\frac{a^2}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a(a-2)(-a^3-2a^2+12a+32)=\frac{3}{4}a(a-2)\left[a\left(12-a^2\right)+2(16-a^2)\right]$$

$$f'(a)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \\ a\left(12-a^2\right)+2(16-a^2)=0 \end{array}\right.$$

Vì $\begin{array}{l} a \in \left[0;2\sqrt{2}\right] \Rightarrow a(12-a^2)+2(16-a^2)>0 \\ \Rightarrow f'(a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right. \end{array}$

Hàm số $f(a)$ liên tục trên $\left[0;2\sqrt{2}\right]$, đồng thời $f(0)=64; f(2)=24; f\left(2\sqrt{2}\right)=32\sqrt{2}$

Suy ra $\max\limits_{a\in[0;2\sqrt{2}]} f(a)=f(0)=64$

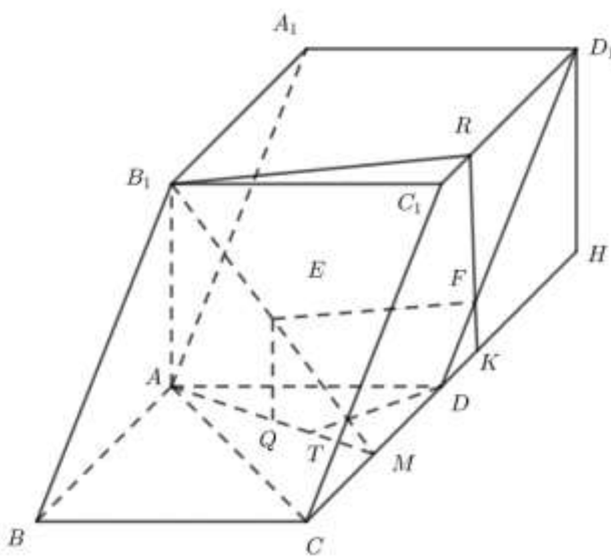
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 64. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=0;c=4$ hoặc $a=c=0;b=4$

Câu 4: (6,0 điểm) Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $a, \angle ABC=60^\circ$ và $B_1A \perp (ABCD)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (B_1CD) và $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng α với $\cot\alpha=\frac{1}{2}$. Gọi M là trung điểm của CD, E là trung điểm của B_1M

a) Tính thể tích khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$

b) Gọi F là điểm thuộc đường thẳng DD_1 sao cho $EF \perp AC$. Tính độ dài đoạn EF và cosin góc giữa hai mặt phẳng (AEM) và (AEF)

Giải:



a) Dễ thấy $\triangle ACD$ đều suy ra $AM \perp CD$ và $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} CD \perp B_1A \\ CD \perp AM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (B_1AM) \Rightarrow \alpha=\angle AMB_1$$

Xét tam giác vuông AMB_1 có :

$$\cot\alpha=\frac{AM}{AB_1}=\frac{1}{2} \Rightarrow AB_1=2AM=a\sqrt{3}$$

Ta cũng có $S_{ABCD}=2S_{ABC}=BA.BC.\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}=AB_1.S_{ABCD}=\frac{3a^3}{2}$$

b)

- Từ $AB_1 = a\sqrt{3} \Rightarrow \angle B_1A_1A = 60°; \angle A_1AB = 120°$

Kẻ $D_1H \perp (ABCD); FK // D_1H \Rightarrow FK \perp (ABCD) \Rightarrow FK \perp AC$

Ta có: $\begin{cases} FK \perp AC \\ EF \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (EFK) \Rightarrow AC \perp EK$

Gọi Q là trung điểm của AM

$\Rightarrow EQ // B_1A \Rightarrow EQ \perp (ABCD) \Rightarrow EQ \perp AC$

Ta có: $\begin{cases} EK \perp AC \\ EQ \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (EQK) \Rightarrow AC \perp QK$

Dễ thấy $AH // BD \Rightarrow AH \perp AC \Rightarrow QK // AH$

Suy ra K là trung điểm của MH

$\Rightarrow DK = MK - MD = \frac{1}{2}MH - MD = \frac{1}{2}(MD + DH) - MD = \frac{a}{4}$

$\Rightarrow \frac{DK}{DH} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DF}{DD_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow DF = \frac{1}{4}DD_1 = \frac{1}{4}AA_1 = \frac{1}{4}\sqrt{B_1A^2 + B_1A_1^2} = \frac{a}{2}$

Ta cũng có: $\begin{cases} FM = \sqrt{FD^2 + DM^2 - 2FD.DM.\cos 120°} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ B_1M = \sqrt{B_1A^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2} \end{cases}$

Kẻ $FR \perp (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow FR // C_1D$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{FR}{C_1D} = \frac{D_1F}{DD_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow FR = \frac{3}{4}C_1D = \frac{3}{4}B_1A = \frac{3a\sqrt{3}}{4} \\ \frac{C_1R}{C_1D_1} = \frac{DF}{DD_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow C_1R = \frac{C_1D_1}{4} = \frac{a}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow B_1R = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1R^2 - 2.C_1R.B_1C_1.\cos 120°} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$

$\Rightarrow B_1F = \sqrt{B_1R^2 + RF^2} = a\sqrt{3}$

Áp dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác B_1FM ta có:

$$EF=\frac{\sqrt{2\left(B_1F^2+FM^2\right)-B_1M^2}}{2}=\frac{a\sqrt{15}}{4}$$

- Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (AEM) và (AEF)

Ta có: $\sin\beta=\frac{d\left(F;(AEM)\right)}{d(F;AE)}$

+) Ta có: $d\left(F;(AEM)\right)=d\left(F;(AB_1M)\right)=d\left(K;(AB_1M)\right)$

$$\frac{d\left(K;(AB_1M)\right)}{d\left(D;(AB_1M)\right)}=\frac{KM}{DM}=1+\frac{KD}{DM}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow d\left(K;(AB_1M)\right)=\frac{3}{2}d\left(D;(AB_1M)\right)$$

Kẻ $DT\perp AM\Rightarrow DT\perp\left(B_1AM\right)\Rightarrow d\left(D;(B_1AM)\right)=DT$

Ta có: $DT.AM=AD.DM.\sin 60^\circ\left(=2S_{ADM}\right)$

$$\Rightarrow DT=\frac{AD.DM.\sin 60^\circ}{AM}=\frac{a}{2}\Rightarrow d\left(D;(B_1AM)\right)=\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow d\left(K;(B_1AM)\right)=\frac{3a}{4}$$

+) $AF=\sqrt{AK^2+KF^2}=\sqrt{AD^2+DK^2-2AD.DK.\cos 120^\circ+\left(\frac{HD_1}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét tam giác AEF cân tại E. Kẻ $EE_1\perp AF\Rightarrow EE_1=\frac{3a}{4}$

Kẻ $FF_1\perp AE\Rightarrow d(F;AE)=FF_1$

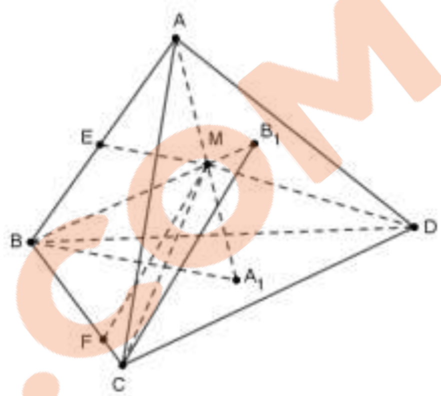
Ta có: $FF_1.EA=EE_1.AF\left(=2S_{EAF}\right)\Rightarrow FF_1=\frac{EE_1.AF}{EA}=\frac{3a}{\sqrt{10}}\Rightarrow d(F;AE)=\frac{3a}{\sqrt{10}}$

Suy ra $\sin\beta=\frac{d\left(F;(AEM)\right)}{d(F;AE)}=\frac{\sqrt{10}}{4}\Rightarrow\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{4}$

Câu 5: (1,5 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M nằm trong tứ diện. Qua M dựng các mặt phẳng α // BCD , β // ACD , γ // ABD và μ // ABC . Biết α cắt AB tại E, β cắt BC tại F, γ cắt CD tại P, μ cắt AD tại Q.

Chứng minh $\sqrt{\dfrac{EA}{EB}}+\sqrt{\dfrac{FB}{FC}}+\sqrt{\dfrac{PC}{PD}}+\sqrt{\dfrac{QD}{QA}}\geq 4\sqrt{3}.$

Giải:



Gọi $A_1 = AM\cap BCD$, $B_1 = AM\cap ACD$,

$C_1 = AM\cap ABD$, $D_1 = AM\cap ABC$

+) Trong mặt phẳng ABA_1 kẻ đường thẳng qua M song song với A_1B cắt AB tại $E\Rightarrow \dfrac{EA}{EB}=\dfrac{MA}{MA_1}.$

+) Tương tự ta cũng có:

$\dfrac{FB}{FC}=\dfrac{MB}{MB_1},\ \dfrac{PC}{PD}=\dfrac{MC}{MC_1},\ \dfrac{QD}{QA}=\dfrac{MD}{MD_1}.$

Khi đó: $\sqrt{\dfrac{EA}{EB}}+\sqrt{\dfrac{FB}{FC}}+\sqrt{\dfrac{PC}{PD}}+\sqrt{\dfrac{QD}{QA}}=\sqrt{\dfrac{MA}{MA_1}}+\sqrt{\dfrac{MB}{MB_1}}+\sqrt{\dfrac{MC}{MC_1}}+\sqrt{\dfrac{MD}{MD_1}}$

Đặt $V_{ABCD}=V,\ V_{MBCD}=V_a,\ V_{MACD}=V_b,\ V_{MABD}=V_c,\ V_{MABC}=V_d.$

Khi đó $\dfrac{V_a}{V}=\dfrac{d\ M;\ BCD\ .S_{BCD}}{d\ A;\ BCD\ .S_{BCD}}=\dfrac{d\ M;\ BCD}{d\ A;\ BCD}=\dfrac{MA_1}{AA_1}$

$$\Rightarrow\frac{MA}{MA_1}=\frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{AA_1}{MA_1}-1=\frac{V}{V_a}-1=\frac{V-V_a}{V_a}=\frac{V_b+V_c+V_d}{V_a}\geq\frac{3\sqrt[3]{V_bV_cV_d}}{V_a}\qquad(1)$$

Tương tự ta có: $\dfrac{MB}{MB_1}\geq\dfrac{3\sqrt[3]{V_aV_cV_d}}{V_b};\ \dfrac{MC}{MC_1}\geq\dfrac{3\sqrt[3]{V_aV_bV_d}}{V_c};\ \dfrac{MD}{MD_1}\geq\dfrac{3\sqrt[3]{V_aV_bV_c}}{V_d}.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{MA}{MA_1}.\dfrac{MB}{MB_1}.\dfrac{MC}{MC_1}.\dfrac{MD}{MD_1}\geq 81.$

Khi đó $\sqrt{\dfrac{MA}{MA_1}}+\sqrt{\dfrac{MB}{MB_1}}+\sqrt{\dfrac{MC}{MC_1}}+\sqrt{\dfrac{MD}{MD_1}}\geq 4\sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{MA}{MA_1}.\dfrac{MB}{MB_1}.\dfrac{MC}{MC_1}.\dfrac{MD}{MD_1}}}\geq 4\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{MA}{MA_1}=\dfrac{MB}{MB_1}=\dfrac{MC}{MC_1}=\dfrac{MD}{MD_1}=3$ hay M là trọng tâm tứ diện.