SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC **KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2021 - 2022**

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN - THPT

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+25}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(0;10)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$.

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-4\cos x+8=4(\sqrt{3}+1)\sin x$.

Câu 4. Cho $f(x)=\log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$. Tính $S=f\left(\dfrac{1}{2021}\right)+f\left(\dfrac{2}{2021}\right)+...+f\left(\dfrac{2019}{2021}\right)+f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)$.

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Câu 6. Cho tập hợp $E=\{10,10^2,10^3,...,10^{20}\}$. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp E, giả sử hai số được lấy ra là x và y (với $x<y$). Tính xác suất để $\log_x y$ là một số nguyên.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC. Gọi hai điểm M, N tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm A lên hai đường thẳng SB và SD. Biết $SA=a$, $BD=a\sqrt{3}$ và $\widehat{BAD}=60°$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AC=a$ và $\widehat{ABC}=30°$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $BC, B'C', A'B$ và $A'C$. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}$ tù. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=25$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC cắt đường tròn (C) tại điểm $K(1;-2)$ (K không trùng với A). Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-1;\dfrac{16}{3}\right)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Câu 10. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$.

.... *Hết* ....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC **KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2021 – 2022**

ĐỀ THI MÔN: TOÁN – THPT

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+25}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(0;10)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-25}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;10)$ thì

$$\begin{cases} y'>0,\forall x\in(0;10) \\ -m\notin(0;10)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-25>0 \\ -m\notin(0;10)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>5\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -m\le 0 \\ -m\ge 10\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -10 \\ m>5\end{array}\right.$$

Vậy $m\in(-\infty;-10]\cup(5;+\infty)$ là các giá trị cần tìm.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$.

Lời giải

◆ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

◆ Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-1$ có $\begin{cases} a_{y'}=1\neq 0 \\ \Delta'_{y'}=m^2-(m^2-1)=1>0\ \forall m\end{cases}$ suy ra hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Cách 1.

◆ Lấy y chia y' ta được $y=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}m\right)y'-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}m(m^2-1)$.

◆ Đặt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho, ta có:

$y_1=-\dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{1}{3}m(m^2-1)$, $y_2=-\dfrac{2}{3}x_2+\dfrac{1}{3}m(m^2-1)$. Do đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A,B là $\Delta: y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}m(m^2-1)$.

◆ Vì đường thẳng $\Delta: y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}m(m^2-1)$ không song song với đường thẳng $d: y=5x-9$ nên A,B cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$ khi và chỉ khi trung điểm I của đoạn thẳng AB thuộc đường thẳng $d: y=5x-9$.

◆ Ta có $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=m$, $y_I=-\dfrac{2}{3}x_I+\dfrac{1}{3}m(m^2-1)=\dfrac{1}{3}m^3-m\Rightarrow I\left(m;\dfrac{1}{3}m^3-m\right)$.

$$I\left(m;\frac{1}{3}m^3-m\right)\in d: y=5x-9\Leftrightarrow \frac{1}{3}m^3-m=5m-9\Leftrightarrow m^3-18m+27=0$$

$\Leftrightarrow (m-3)\left(m^2+3m-9\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

◆ Vậy $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2.

Đồ thị hàm số có điểm uốn $I\left(m;\dfrac{1}{3}m^3-m\right)$. Để hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$ thì $I\in d$ hay $\dfrac{1}{3}m^3-m=5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-4\cos x+8=4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-4\cos x+8=4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cos x-4\cos x-4\sqrt{3}\sin x-4\sin x+8=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-2\right)-4\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2(\sin x-2)(\sqrt{3}\sin x+\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow \sin(x+\dfrac{\pi}{6})=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 4. Cho $f(x)=\log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$. Tính $S=f\left(\dfrac{1}{2021}\right)+f\left(\dfrac{2}{2021}\right)+...+f\left(\dfrac{2019}{2021}\right)+f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)$.

Lời giải

ĐK: $0<x<1$.

◆ Ta có $f(x)=\log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\log_2 x-\log_2(1-x)$.

◆ Xét:

$f\left(\dfrac{1}{2021}\right)=\log_2\dfrac{1}{2021}-\log_2\dfrac{2020}{2021}$.

$f\left(\dfrac{2}{2021}\right)=\log_2\dfrac{2}{2021}-\log_2\dfrac{2019}{2021}$.

$f\left(\dfrac{3}{2021}\right)=\log_2\dfrac{3}{2021}-\log_2\dfrac{2018}{2021}$.

……….

$f\left(\dfrac{2019}{2021}\right)=\log_2\dfrac{2019}{2021}-\log_2\dfrac{2}{2021}$.

$f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)=\log_2\dfrac{2020}{2021}-\log_2\dfrac{1}{2021}$.

◆ Ta thấy: $f\left(\dfrac{k}{2021}\right)+f\left(\dfrac{2021-k}{2021}\right)=0, k\in\mathbb{Z}, 1\le k\le 2020$ và từ $f\left(\dfrac{1}{2021}\right)$ đến $f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)$ có 2020 số hạng.

◆ Do vậy tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2021}\right)+f\left(\dfrac{2}{2021}\right)+...+f\left(\dfrac{2019}{2021}\right)+f\left(\dfrac{2020}{2021}\right)=0$.

Câu 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1\end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 & (1)\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 & (2)\end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có $x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2}-y$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+(-y)^2}\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$, $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số f liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow x=-y\Leftrightarrow y=-x$. Thay vào phương trình (2) ta được

$x\sqrt{2x^2+6x+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow 2x^2+6x+1-x\sqrt{2x^2+6x+1}-6x^2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ 2x^2-6x-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ 7x^2-6x-1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\\ x=1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $\left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$, $(1;-1)$.

Câu 6. Giả sử $E=\{10;10^2;10^3;...;10^{20}\}$. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 số từ tập hợp E, giả sử hai số được lấy ra là x và y (với $x<y$). Tính xác suất sao cho $\log_x y$ là một số nguyên.

Lời giải

$n(\Omega)=C_{20}^2=190$.

$x=10^\alpha;\ y=10^\beta$.

$\log_x y=\dfrac{\beta}{\alpha}\in\mathbb{Z}\ \left(\alpha\ne\beta;\ \beta>\alpha;\ \beta,\alpha\in[1;20]=A\right)$.

Nếu $\alpha = 1 \Rightarrow \beta \in \{n \in \mathbb{N};\ n \in [2;20]\} = \{2;3;4;...;20\} \Rightarrow \beta$ có 19 cách chọn.

Nếu $\alpha = 2 \Rightarrow \beta \in \{2n \mid n \in \mathbb{N};\ n \in [3;20]\} = \{4;6;8;...;20\} \Rightarrow \beta$ có 9 cách chọn.

Nếu $\alpha = 3 \Rightarrow \beta \in \{3n \mid n \in \mathbb{N};\ 2 \le n \le 6\} = \{6;9;12;15;18\} \Rightarrow \beta$ có 5 cách chọn.

Nếu $\alpha = 4 \Rightarrow \beta \in \{4n \mid n \in \mathbb{N};\ 2 \le n \le 5\} = \{8;12;16;20\} \Rightarrow \beta$ có 4 cách chọn.

Nếu $\alpha = 5 \Rightarrow \beta \in \{5n \mid n \in \mathbb{N};\ 2 \le n \le 4\} = \{10;15;20\} \Rightarrow \beta$ có 3 cách chọn.

Nếu $\alpha = 6 \Rightarrow \beta \in \{6n \mid n \in \mathbb{N};\ 2 \le n \le 3\} = \{12;18\} \Rightarrow \beta$ có 2 cách chọn.

Nếu $\alpha = 7 \Rightarrow \beta = 14 \Rightarrow \beta$ có 1 cách chọn.

Nếu $\alpha = 8 \Rightarrow \beta = 16 \Rightarrow \beta$ có 1 cách chọn.

Nếu $\alpha = 9 \Rightarrow \beta = 18 \Rightarrow \beta$ có 1 cách chọn.

Nếu $\alpha = 10 \Rightarrow \beta = 20 \Rightarrow \beta$ có 1 cách chọn.

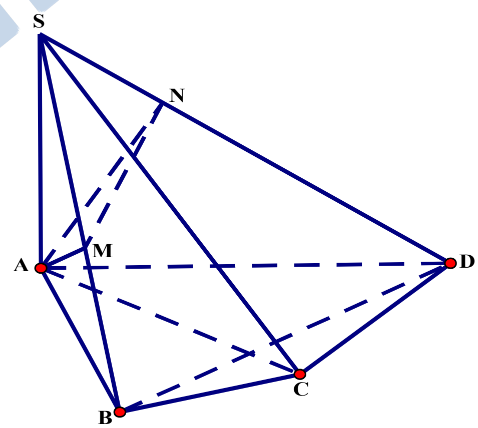
Gọi A: "$\log_x y$ là một số nguyên"

$\Rightarrow n(A) = 19 + 9 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 46$.

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{46}{190} = \dfrac{23}{95}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC. Gọi hai điểm M, N tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm A lên hai đường thẳng SB và SD. Biết $SA = a,\ BD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$.

Lời giải



Do tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC nên $AB \perp BC,\ AD \perp DC$.

Ta có :

+) $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

+) $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

+) $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$

+) $\begin{cases} AN \perp SD \\ AN \perp CD \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$

+) $\begin{cases} SC \perp AM \\ SC \perp AN \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

+) $\begin{cases} SC \perp (AMN) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((AMN),(ABCD)) = (SC, SA)$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Khi đó ta có:

$$R = \frac{BD}{2\sin\widehat{ABD}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = a.$$

Mặt khác R cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD \Rightarrow AC = 2R = 2a$.

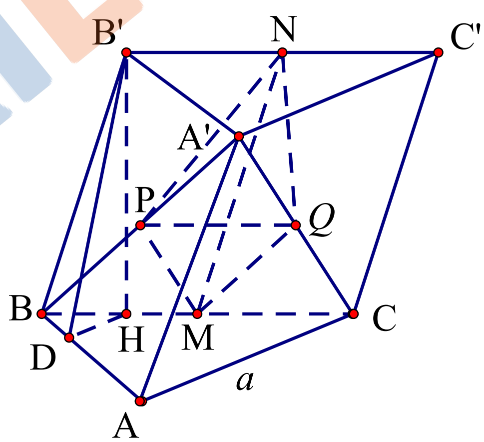
Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Khi đó: $\cos\widehat{ASC} = \frac{SA}{SC} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow \cos(SA, SC) = \cos\widehat{ASC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$ là $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AC = a$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $BC, B'C', A'B$ và $A'C$. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A ta có

$$BC = \frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a;\ AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}.$$

Gọi H là hình chiếu của B' lên BC. Khi đó $B'H \perp (ABC)$ (do $(BCC'B') \perp (ABC)$).

Gọi D là hình chiếu của H trên AB.

$$AB \perp (DHB') \Rightarrow \widehat{B'DH} = \left(\widehat{(ABB'A'),(ABC)}\right) = 60^\circ.$$

Đặt $DH = x \Rightarrow BD = \dfrac{DH}{\tan \widehat{DBH}} = \dfrac{x}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3}$.

Xét tam giác $BB'D$ vuông tại D có $B'D^2 = B'B^2 - BD^2 = 4a^2 - 3x^2 \Rightarrow B'D = \sqrt{4a^2 - 3x^2}$.

Xét tam giác $B'DH$ vuông tại H ta có

$\cos \widehat{B'DH} = \dfrac{DH}{B'D} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{4a^2 - 3x^2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 3x^2} = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\left(4a^2 - 3x^2\right) = x^2$.

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = 7x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{4a^2}{7} \Rightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7} \Rightarrow B'H = DH.\tan 60^\circ = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7}.\sqrt{3} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.B'H = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.a.\dfrac{2a\sqrt{21}}{7} = \dfrac{3a^3\sqrt{7}}{7}$.

Vì $S_{\Delta MPQ} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta A'BC}$ và $NC' // BC \Rightarrow NC' // \left(A'BC\right)$ do đó $d\left(N,\left(A'BC\right)\right) = d\left(C',\left(A'BC\right)\right)$.

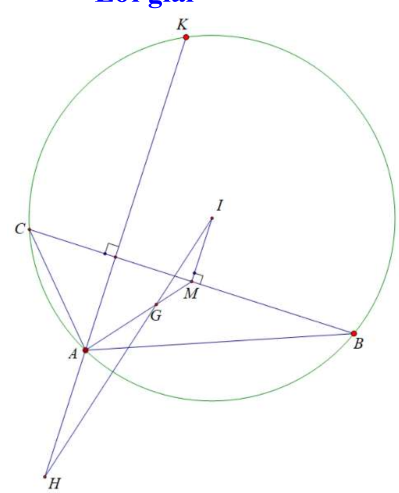
Suy ra $V_{MNPQ} = V_{N.MPQ} = \dfrac{1}{4}V_{N.A'BC} = \dfrac{1}{4}V_{C'.A'BC}$.

Mặt khác ta lại có: $V_{C'.A'BC} = V_{A'.C'BC} = \dfrac{1}{2}V_{A'.BCC'B'} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{12}.\dfrac{3a^3\sqrt{7}}{7} = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{28}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}$ tù. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(C):(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC cắt đường tròn (C) tại điểm $K(1;-2)$ (K không trùng với A). Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-1;\dfrac{16}{3}\right)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải



- Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $IM \perp BC$ với $I(-2;2)$ là tâm đường tròn (C).
- Gọi $H \equiv IG \cap AK$.

Do $IM // AH$ nên áp dụng định lý Talet ta có

$$\frac{IM}{AH}=\frac{IG}{GH}=\frac{MG}{GA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}GH=2.IG\\AH=2.IM\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{GH}=2.\overrightarrow{IG}\ \ (1)\\\overrightarrow{AH}=2.\overrightarrow{IM}\ \ (2)\end{cases}.$$

◆ Gọi tọa độ $H(x;y)$.

Ta có $I(-2;2)$; $\overrightarrow{GH}=\left(x+1;y-\frac{16}{3}\right)$; $\overrightarrow{IG}=\left(1;\frac{10}{3}\right)$.

Từ (1) ta có $\begin{cases}x+1=2\\y-\frac{16}{3}=\frac{20}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=12\end{cases}\Rightarrow H(1;12)$.

◆ Đường thẳng AK đi qua điểm $K(1;-2)$ và $H(1;12)$ có véctơ chỉ phương là

$\vec{u}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{KH}=-\frac{1}{2}(0;14)=(0;-7)\Rightarrow$ VTPT $\vec{n}=(7;0)$.

Phương trình đường thẳng AK là $7(x-1)+0(y+2)=0\Leftrightarrow x=1$.

◆ Do $\{A,K\}=(C)\cap AK$, ta có

$$\begin{cases}x=1\\(x+2)^2+(y-2)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\(y-2)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-2\\x=1\Rightarrow y=6\end{array}\right..$$

Suy ra tọa độ $A(1;6)$.

◆ Gọi tọa độ $M(a;b)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(a+2;b-2)$; $\overrightarrow{AH}=(0;6)$.

Từ (2) ta có $\begin{cases}2(a+2)=0\\2(b-2)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}\Rightarrow M(-2;5)$.

◆ Đường thẳng BC đi qua điểm $M(-2;5)$ và vuông góc với AK nên có VTPT $\vec{u}=(0;-7)$ có phương trình là $-7(y-5)=0\Leftrightarrow y=5$.

◆ Do B, C là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C) nên tọa độ B, C là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases}y=5\\(x+2)^2+(y-2)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\(x+2)^2=16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=5\Rightarrow x=2\Rightarrow B(2;5)\\y=5\Rightarrow x=-6\Rightarrow C(-6;5)\end{array}\right..$$

Khi đó $\overrightarrow{BC}=(-8;0)\Rightarrow BC=8$.

Khoảng cách từ A đến BC là $\mathrm{d}(A,BC)=\frac{|1|}{\sqrt{1^2}}=1$.

Vậy diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.\mathrm{d}(A,BC).BC=\frac{1}{2}.1.8=4$.

Câu 10. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$.

Lời giải

$x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Điều kiện $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge -1 \end{cases} \Rightarrow x+y\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki $(ax+by)\le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

$x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2} \Leftrightarrow (x+y)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\sqrt{y+1}\right)^2 \le 3(x-1+y+1)=3(x+y)$

$\Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x+y\le 3$.

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+8\sqrt{4-(x+y)}+2$.

Đặt $t=x+y, 0\le t\le 3$.

$P=t^2+2t+8\sqrt{4-t}+2, (0\le t\le 3),\ P'=2t+2-\dfrac{4}{\sqrt{4-t}}=\dfrac{(2t+2)\sqrt{4-t}-4}{\sqrt{4-t}}$.

$P'=0 \Rightarrow (t+1)\sqrt{4-t}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 3 \\ (t+1)^2(4-t)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 3 \\ t^3-2t^2-7t=0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^2-2t-7=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} t=0 \\ \left[\begin{array}{l} t=1+2\sqrt{2} \\ t=1-2\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=0$. $\begin{cases} P(0)=18 \\ P(3)=25 \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 25 khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ và giá trị lớn nhất của P bằng 18 khi $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.