

Câu 1 (5,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{3-x}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tam giác MNI có trọng tâm nằm trên (C) .

b) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , biết $f'(x) = x^6(x-2)^3(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4), \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2 (4,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $\frac{2 \cdot 9^x - 3 \cdot 6^x}{6^x - 4^x} \leq 2$ trên tập số thực.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{27x^2 - 54x + 9m} = 3x^2 - 8x + m - 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 3 (5,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a , đường chéo $AC = a$. Tam giác SAD là tam giác cân tại S và (SAD) vuông góc với $(ABCD)$. Biết SA tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 45° .

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC .

b) Gọi M là trung điểm của SD , lấy điểm N thuộc cạnh SC sao cho $SN = 2NC$, gọi P là giao điểm của (AMN) và BC . Tính thể tích khối đa diện $AMNPCD$.

Câu 4 (4,0 điểm)

a) Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{2022}$.

b) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S , tính xác suất để lấy được số có dạng \overline{abcdef} sao cho $a.b.c.d.e.f = 1400$.

Câu 5 (2,0 điểm) Cho a, b là những số thực thỏa mãn $a^2 - ab + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^4 + b^4 - 2}{a^2 + b^2 + 1}$.

.....HẾT.....



- Câu 1.** a/ Cho hàm số $y = \frac{x+1}{3-x}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của của hai đường tiệm cận của (C) .
 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tam giác MNI có trọng tâm nằm trên (C) .

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị } (C).$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty \Rightarrow x = 3 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị } (C).$$

$\Rightarrow I(3; -1)$ là giao điểm của của hai đường tiệm cận của (C) .

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+1}{3-x} = x+m \Leftrightarrow -x^2 + (2-m)x + 3m-1 = 0 (*)$.

Đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt và khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16 \neq 0 \\ m^2 + 8m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$$

Đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; x_1 + m), N(x_2; x_2 + m)$ với x_1, x_2 là nghiệm phương trình $(*)$.

M, N, I tạo thành tam giác khi $m \neq -4$

Tam giác MNI có trọng tâm $G\left(\frac{x_1 + x_2 + 3}{3}; \frac{x_1 + x_2 + 2m - 1}{3}\right) = \left(\frac{m+1}{3}; m-1\right)$

$$G \in (C) \Rightarrow m-1 = \frac{m+4}{8-m} \Rightarrow -m^2 + 8m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$$

Vậy $m = 2; m = 6$.

b/ Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , biết $f'(x) = x^6(x-2)^3(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4), \forall x \in \mathbb{R}$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ g(x) = x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4 = 0 (*) \end{cases}$$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị \Leftrightarrow đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục $Oy \Leftrightarrow f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ

$\Leftrightarrow PT(*)$ có hai nghiệm trái dấu và khác 2 hoặc $PT(*)$ có một nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương khác 2.

• $PT(*)$ có hai nghiệm trái dấu và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 16 \neq 0 \\ m^2 - 3m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2} \\ m \in (-1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 4).$

• $PT(*)$ có một nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$

Với $m = -1 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 > 0 \end{cases}$. Vậy $m = -1$.

Với $m = 4 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 > 0 \end{cases}$. Vậy $m = 4$.

Vậy $m \in [-1; 4]$.

Câu 2 (4,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $\frac{2 \cdot 9^x - 3 \cdot 6^x}{6^x - 4^x} \leq 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{27x^2 - 54x + 9m} = 3x^2 - 8x + m - 1$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

a) Điều kiện: $6^x \neq 4^x \Leftrightarrow x \neq 0$.

Ta có: $\frac{2 \cdot 9^x - 3 \cdot 6^x}{6^x - 4^x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} \leq 2$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$ và $t \neq 1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $\frac{2t-3}{1-\frac{1}{t}} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2t^2-5t+2}{t-1} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 1 < t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \\ 0 < x \leq \log_{\frac{3}{2}} 2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(-\infty; \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\right] \cup \left(0; \log_{\frac{3}{2}} 2\right]$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 6x + m > 0 \end{cases}$

$$\log_3 \frac{2x-1}{27x^2 - 54x + 9m} = 3x^2 - 8x + m - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1) - \log_3(3x^2 - 6x + m) = 3x^2 - 8x + m - 1 (*)$$

Đặt $u = 3x^2 - 6x + m, v = 2x - 1 (u > 0, v > 0)$.

Khi đó phương trình (*) tương đương: $\log_3 u + u = \log_3 v + v$.

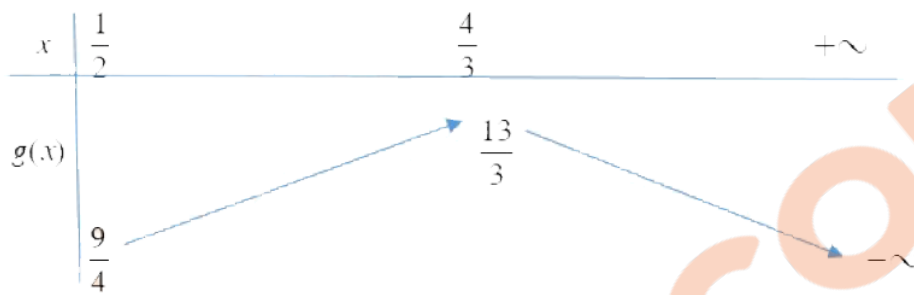
Vì hàm số $y = f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên

$$\log_3 u + u = \log_3 v + v \Rightarrow u = v.$$

$$\text{Suy ra } 3x^2 - 6x + m = 2x - 1 \Rightarrow 3x^2 - 8x + m + 1 = 0.$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình: $3x^2 - 8x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $3x^2 - 8x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -3x^2 + 8x - 1$. Xét hàm số $g(x) = -3x^2 + 8x - 1$ có bảng biến thiên sau

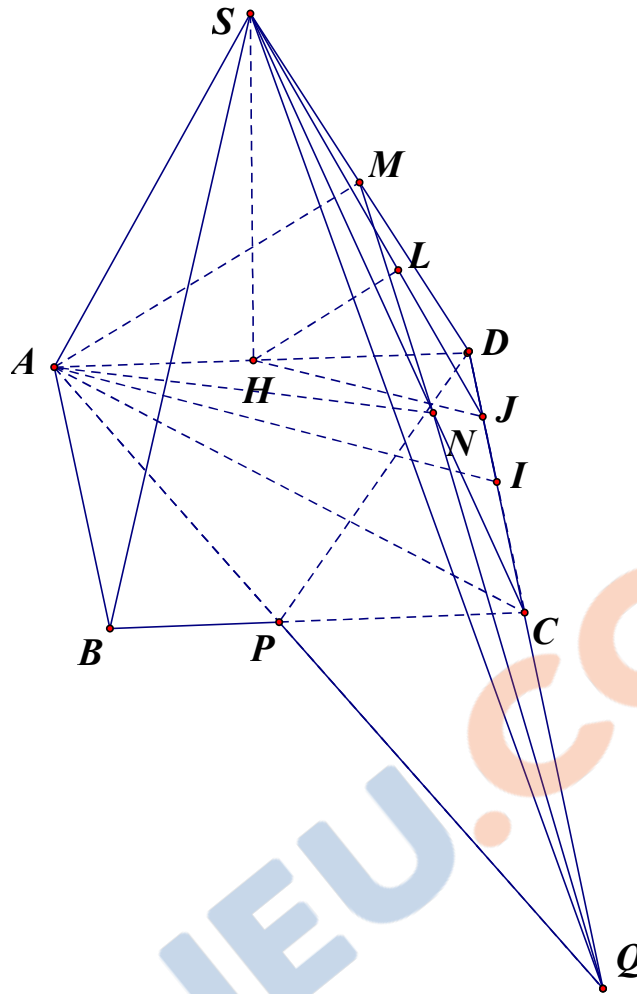


Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ khi $\frac{9}{4} < m < \frac{13}{3}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a , đường chéo $AC = a$. Tam giác SAD là tam giác cân tại S và $(SAD) \perp (ABCD)$. Biết SA tạo với đáy một góc bằng 45° .

- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC .
- Gọi M là trung điểm SD , lấy điểm N thuộc cạnh SC sao cho $SN = 2NC$, gọi P là giao điểm của (AMN) với BC . Tính thể tích khối đa diện $AMNPCD$.

Lời giải:



a) Gọi H là trung điểm AD .

Suy ra $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SAH} = \widehat{SA; (ABCD)} = \widehat{SAH} \Rightarrow \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow SH = AH = \frac{a}{2}$.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = d(A; (SCD)) = 2d(H; (SCD))$.

Đây là hình thoi cạnh bằng a , đường chéo $AC = a$ nên tam giác ACD đều.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm CD, AD . Khi đó $HJ \perp CD$.

Gọi L là hình chiếu của H lên cạnh SJ . Khi đó ta chứng minh được $HL \perp (SCD)$.

$$\text{Do đó } d(H; (SCD)) = HL \Rightarrow d(AB; SC) = 2HL = \sqrt{\frac{HS^2 \cdot HJ^2}{HS^2 + HJ^2}} = \sqrt{\frac{HS^2 \cdot \left(\frac{1}{2} AI\right)^2}{HS^2 + \left(\frac{1}{2} AI\right)^2}}.$$

Ta có tam giác ACD đều cạnh bằng a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } d(AB; SC) = 2 \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

b) Gọi $Q = MN \cap CD \Rightarrow P = BC \cap AQ$.

Trong tam giác SDQ có $MS = MD, SN = 2NC$ nên N là trọng tâm tam giác SDQ .

Suy ra $CD = CQ, PQ = PA$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{QPNC}}{V_{QAMD}} = \frac{QP}{QA} \cdot \frac{QN}{QM} \cdot \frac{QC}{QD} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{AMNPDC} = \frac{5}{6} V_{QAMD}.$$

$$\text{Lại có } V_{MADQ} = \frac{1}{2} V_{SADQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{AQD} = \frac{1}{6} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$$

$$\text{Vậy } V_{AMNPDC} = \frac{5}{6} V_{QAMD} = \frac{5a^3 \sqrt{3}}{144}.$$

Câu 4. a) Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{2002}$.

b) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S . Tính xác suất để lấy được số có dạng \overline{abcdef} sao cho $a.b.c.d.e.f = 1400$.

Lời giải

a) Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{2002}$.

Số hạng tổng quát của khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{2002}$ là: $T_{k+1} = C_{2002}^k 2^{\frac{2002-k}{2}} 5^{\frac{k}{3}}$.

Để $T_{k+1} = C_{2002}^k 2^{\frac{2002-k}{2}} 5^{\frac{k}{3}}$ là số nguyên thì ta có:
$$\begin{cases} \frac{k}{3} \in \mathbb{N} \\ \frac{2002-k}{2} \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3n \leq 2002 \\ k = 2m \leq 2002 \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Từ đó ta suy ra $\begin{cases} n = 2p \\ 0 \leq 2p \leq 674 \end{cases}, p \in \mathbb{N}.$

Vậy có $\frac{674}{2} + 1 = 338$ số p thỏa mãn tức là có 338 số hạng là số nguyên trong khai triển $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{2002}$.

b) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S . Tính xác suất để lấy được số có dạng \overline{abcdef} sao cho $a.b.c.d.e.f = 1400$.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 9.10^5$.

Gọi X là biến cố lấy được số có dạng \overline{abcdef} sao cho $a.b.c.d.e.f = 1400$.

Ta có $1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2.4.5^2.7.1 = 8.5^2.7.1.1$.

Trường hợp 1: a, b, c, d, e, f là 1 trong 6 số: 2, 2, 2, 5, 5, 7 có $\frac{6!}{3!.2!.1!} = 120$ số \overline{abcdef} .

Trường hợp 2: a, b, c, d, e, f là 1 trong 6 số: 2, 4, 5, 5, 7, 1 có $\frac{6!}{1!.1!.1!.2!.1!} = 360$ số \overline{abcdef} .

Trường hợp 3: a, b, c, d, e, f là 1 trong 6 số: 8, 5, 5, 7, 1, 1 có $\frac{6!}{2!.2!.1!.1!} = 180$ số \overline{abcdef} .

Vậy số phần tử của tập X là $n(X) = 120 + 360 + 180 = 660$.

Xác suất của biến cố X là $P(X) = \frac{660}{9.10^5} = \frac{22}{3.10^4}$.

Câu 5 (2,0 điểm) Cho a, b là những số thực thỏa mãn $a^2 - ab + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{a^4 + b^4 - 2}{a^2 + b^2 + 1}$.

Lời giải:

Theo giả thiết: $a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 3ab = 1$ (1).

Đặt $\begin{cases} s = a+b \\ p = ab \end{cases}$. Điều kiện: $s^2 \geq 4p$.

Khi đó (1) trở thành: $s^2 - 3p = 1 \Leftrightarrow s^2 = 3p + 1 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq -\frac{1}{3}$.

Mà $s^2 \geq 4p$ nên $3p + 1 \geq 4p \Leftrightarrow p \leq 1$.

Ta có: $a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 + ab$.

$$a^4 + b^4 - 2 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - 2 = (1 + ab)^2 - 2(ab)^2 - 2.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{(1 + ab)^2 - 2(ab)^2 - 2}{1 + ab + 1} = \frac{(1 + p)^2 - 2p^2 - 2}{p + 2} = \frac{-p^2 + 2p - 1}{p + 2} = -\frac{(p - 1)^2}{p + 2}.$$

Xét hàm số $f(p) = -\frac{(p - 1)^2}{p + 2}$ với $-\frac{1}{3} \leq p \leq 1$.

$$f'(p) = -\frac{2(p - 1)(p + 2) - (p - 1)^2}{(p + 2)^2} = -\frac{2(p^2 + p - 2) - p^2 + 2p - 1}{(p + 2)^2} = \frac{-p^2 - 4p + 5}{(p + 2)^2}.$$

$$f'(p) = 0 \Leftrightarrow -p^2 - 4p + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = -5 \notin \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \end{cases}$$

Ta có: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{15}$ và $f(1) = 0$.

Suy ra: Giá trị lớn nhất của P là 0 khi $\begin{cases} ab = 1 \\ a + b = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases}$.

Giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{16}{15}$ khi $\begin{cases} ab = -\frac{1}{3} \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

----- Hết -----