

Nội dung bài viết

1. [A. Hoạt động khởi động - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai](#)
2. [B. Hoạt động hình thành kiến thức - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai](#)
3. [C. Hoạt động luyện tập - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai](#)
 1. [Câu 1: \(trang 28 SGK VNEN Toán 9 tập 1 chương 1\)](#)
 2. [Câu 2: \(trang 28 SGK Toán lớp 9 VNEN tập 1 chương 1\)](#)
 3. [Câu 3: \(trang 28 SGK Toán 9 VNEN tập 1 chương 1\)](#)
 4. [Câu 4: \(trang 28 SGK Toán VNEN lớp 9 tập 1 chương 1\)](#)
 5. [Câu 5: \(trang 28 SGK VNEN Toán 9 tập 1 chương 1\)](#)
 6. [Câu 6: \(trang 28 SGK Toán lớp 9 VNEN tập 1 chương 1\)](#)
4. [D.E. Hoạt động vận dụng và tìm tòi, mở rộng - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai](#)
 1. [Câu 1: \(trang 29 SGK Toán VNEN lớp 9 tập 1 chương 1\)](#)
 2. [Câu 2: \(trang 29 SGK VNEN Toán 9 tập 1 chương 1\)](#)
 3. [Câu 3: \(trang 29 SGK Toán 9 VNEN tập 1 chương 1\)](#)

A. Hoạt động khởi động - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Thực hiện ví dụ sau:

$$5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$$

Rút gọn

với $a > 0$

Hướng dẫn:

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết như: khử căn ở mẫu, đưa thừa số ra ngoài dấu căn,... cụ thể:

$$\begin{aligned} & 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{a} + \frac{6}{2}\sqrt{a} - a\sqrt{\frac{4a}{a^2}} + \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt{5} = 6\sqrt{a} + \sqrt{5} \end{aligned}$$

B. Hoạt động hình thành kiến thức - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

1. a) Đọc hiểu nội dung:

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và phép biến đổi đã biết như: đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, khử căn của biểu thức chứa căn để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn (căn đồng dạng).

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{12}}$

b) $\frac{10}{9}(\sqrt{0,8} + \sqrt{1,25})$

c) $4\sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}$

Mẫu:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{12}} &= \sqrt{\frac{9}{12}} + \sqrt{\frac{4}{12}} + \sqrt{\frac{1}{12}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{12}} + \frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{12}}{12} \end{aligned}$$

Trả lời:

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{10}{9}(\sqrt{0,8} + \sqrt{1,25}) \\ &= \frac{10}{9}(\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{5}{4}}) = \frac{10}{9}(\sqrt{\frac{16}{20}} + \sqrt{\frac{25}{20}}) \\ &= \frac{10}{9}(\frac{4}{\sqrt{20}} + \frac{5}{\sqrt{20}}) = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{\sqrt{20}} = \frac{10}{\sqrt{20}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & 4\sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}} = 4\sqrt{\frac{4}{18}} + \sqrt{\frac{36}{18}} + \sqrt{\frac{1}{18}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{18}} + \frac{6}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{15}{\sqrt{18}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2}{5-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau

$$a) 6\sqrt{a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{9}{a}} + \sqrt{7}$$

với $a > 0$,

$$b) 11\sqrt{5a} - \sqrt{125a} + \sqrt{20a} - 4\sqrt{45a} + 9\sqrt{a}$$

với $a \geq 0$;

$$c) 5a\sqrt{25ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 9ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$$

với $b \geq 0, a \geq 0$

$$d) \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ với } a > 0, b > 0$$

Trả lời:

$$\text{a) } 6\sqrt{a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{9}{a}} + \sqrt{7} =$$

$$6\sqrt{a} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{a}}{2} - a\sqrt{\frac{9a}{a^2}} + \sqrt{7} = 6\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{3} - 3\sqrt{a} + \sqrt{7}$$

$$= \frac{10}{3}\sqrt{a} + \sqrt{7}$$

$$\text{b) } 11\sqrt{5a} - \sqrt{125a} + \sqrt{20a} - 4\sqrt{45a} + 9\sqrt{a} =$$

$$11\sqrt{5a} - 5\sqrt{5a} + 2\sqrt{5a} - 12\sqrt{5a} + 9\sqrt{a}$$

$$= -4\sqrt{5a} + 9\sqrt{a} = (9 - 4\sqrt{5})\sqrt{a}$$

$$\text{c) } 5a\sqrt{25ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 9ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b} =$$

$$25ab\sqrt{ab} - 6ab\sqrt{ab} + 27ab\sqrt{ab} - 45ab\sqrt{ab} = ab\sqrt{ab}$$

$$\text{d) } \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{ab}{b^2}} + \sqrt{ab} - \frac{a}{b} \frac{ab}{a^2} = \frac{\sqrt{ab}}{b} + \sqrt{ab} - \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{ab}$$

Ví dụ 3: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$$

$$b) \frac{a + b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}} = |a| \text{ với } a + b > 0 \text{ và } b \neq 0$$

$$c) \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b \text{ với } a > 0, b > 0, a \neq b$$

$$d) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{xy}}{x - y} = 4 \text{ với } x > 0, y > 0, x \neq y$$

Trả lời:

a) Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \\ &= \left[-\frac{\sqrt{7}(1 - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{5}(1 - \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} \right] : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \\ &= -(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5}) = -(7 - 5) = -2 \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái ta có:

$$\frac{a + b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 + 2ab + b^2}}$$

$$= \frac{a+b}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 b^4}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a| \cdot b^2}{a+b} = |a|$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

c) Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

d) Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \frac{\sqrt{xy}}{x - y} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{x - y}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x + 2\sqrt{xy} - y}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{x - y}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \cdot \frac{x - y}{\sqrt{xy}} = 4 \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 4:

$$P = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$$

a) Tính giá trị của biểu thức: khi $a = 25$;

$$B = \left(\frac{a - 2}{a + 2\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} + 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$$

b) Cho biểu thức: với $a > 0$ và $a \neq 1$

$$B = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}}$$

Chứng minh rằng:

Giải

a) Khi $a = 25$ ta có $P = \frac{\sqrt{25} + 1}{\sqrt{25} - 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \left(\frac{a - 2}{a + 2\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} + 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \\ &= \frac{a - 2 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

C. Hoạt động luyện tập - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Câu 1: (trang 28 SGK VNEN Toán 9 tập 1 chương 1)

Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{1}{4}\sqrt{180} + \sqrt{20} - \sqrt{45} + 5$$

$$b) 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{48} - 2\sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{2a} - \sqrt{18a^3} + 4\sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$d) \sqrt{\frac{a}{1+2b+b^2}} \sqrt{\frac{4a+8ab+4ab^2}{225}}$$

Lời giải:

$$a) \frac{1}{4}\sqrt{180} + \sqrt{20} - \sqrt{45} + 5$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5 = \frac{\sqrt{5}}{2} + 5$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{48} - 2\sqrt{3} \\ & = 3\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \sqrt{2a} - \sqrt{18a^3} + 4\sqrt{\frac{a}{2}} \\ & = \sqrt{2a} - 3a\sqrt{2a} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2a}}{2} = 3\sqrt{2a} - 3a\sqrt{2a} = 3\sqrt{2a}(1 - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \sqrt{\frac{a}{1+2b+b^2}} \sqrt{\frac{4a+8ab+4ab^2}{225}} \\ & = \sqrt{\frac{a}{(1+b)^2}} \sqrt{\frac{4a(1+2ab+b^2)}{225}} = \frac{2a}{15} \end{aligned}$$

Câu 2: (trang 28 SGK Toán lớp 9 VNEN tập 1 chương 1)

Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 4$$

$$b) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} = 1$$

với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$

$$c) \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a$$

với $a > 0, a \neq 1$

Lời giải:

a) Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \\ &= \frac{(\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}})}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}})} + \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}})}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}})} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{1} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1} = 4 \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} \\
 &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{2b}{a-b} \\
 &= \frac{a+\sqrt{ab}}{a-b} - \frac{\sqrt{ab}-b}{a-b} - \frac{2b}{a-b} \\
 &= \frac{a+\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+b-2b}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1
 \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

c) Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{a} + 1 + a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot \frac{\sqrt{a} - 1 - a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \\
 &= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 1} \cdot \frac{-a + 2\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} - 1} \\
 &= \frac{(\sqrt{a} + 1)^2}{\sqrt{a} + 1} \cdot \left(-\frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a} - 1}\right) \\
 &= -(\sqrt{a} + 1) \cdot (\sqrt{a} - 1) = -a + 1 = 1 - a
 \end{aligned}$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

Câu 3: (trang 28 SGK Toán 9 VNEN tập 1 chương 1)

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào a:

$$M = \left(\frac{1}{2 + 2\sqrt{a}} + \frac{1}{2 - 2\sqrt{a}} - \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}\right) \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

với $a > 0, a \neq 1$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \left(a + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left(\frac{1-\sqrt{a}}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} + \frac{1+\sqrt{a}}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left(\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left(\frac{2}{2(1-a)} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \left(\frac{1+a}{(1-a)(1+a)} - \frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \frac{1+a-a^2-1}{(1-a)(1+a)} \left(1 + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \frac{a(1-a)}{(1-a)(1+a)} \left(1 + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \frac{a}{1+a} \cdot \frac{a+1}{a} = 1
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của M là 1 và không phụ thuộc vào a.

Câu 4: (trang 28 SGK Toán VNEN lớp 9 tập 1 chương 1)

Tìm x, biết:

a) $\sqrt{3x} = 4$

b) $\sqrt{3x} - \frac{1}{2}\sqrt{3x} + \frac{3}{4}\sqrt{3x} + 5 = 5\sqrt{3x}$

c) $\sqrt{(1-2x)^2} = 2$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\sqrt{3x} = 4 \Leftrightarrow 3x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{16}{3}$$

b) Ta có: $\sqrt{3x} - \frac{1}{2}\sqrt{3x} + \frac{3}{4}\sqrt{3x} + 5 = 5\sqrt{3x}$

$$\Leftrightarrow 5 = 5\sqrt{3x} - \sqrt{3x} + \frac{1}{2}\sqrt{3x} - \frac{3}{4}\sqrt{3x}$$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{15}{4}\sqrt{3x} \Leftrightarrow \sqrt{3x} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x = \frac{16}{27}$$

Vậy $x = \frac{16}{27}$

c) Ta có: $\sqrt{(1-2x)^2} = 2$

* TH1: $x \geq 1/2$

Phương trình $\Leftrightarrow -(1-2x) = 2 \Leftrightarrow x = 3/2$ (thỏa mãn)

* TH1: $x < 1/2$

Phương trình $\Leftrightarrow 1-2x = 2 \Leftrightarrow x = -1/2$ (thỏa mãn)

Vậy $S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$

Câu 5: (trang 28 SGK VNEN Toán 9 tập 1 chương 1)

Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right)$$

với $-1 < a < 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

b) Tìm giá trị của A với

c) Với giá trị nào của a thì $\sqrt{A} > A$?

Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right) \\ &= \frac{3 + \sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{3 + \sqrt{1-a^2}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \\ &= \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{\sqrt{1+a}} = \sqrt{1-a} \end{aligned}$$

a)

b) Với $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ thì

$$A = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$$

c) Ta có: $\sqrt{A} > A \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{1-a}} > \sqrt{1-a}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-a} > 1-a \Leftrightarrow \underline{1-a} > (1-a)^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{1-a} > a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 - a < 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{a(a-1)} < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Vậy $0 < a < 1$.

Câu 6: (trang 28 SGK Toán lớp 9 VNEN tập 1 chương 1)

Cho M với $x > 0, x \neq 1$

$$M = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn biểu thức M

b) Tìm x để $M = 9/2$

c) So sánh M và 4

Bài làm:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)((\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)((\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1-(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2 + \frac{x+1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$b) M = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \frac{5}{2}\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \text{ hoặc } \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } S = \{4; \frac{1}{4}\}.$$

$$c) M = 2 + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức cô -si ta có: } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

$$\text{Suy ra: } M \geq 2 + 2 = 4.$$

$$\text{Vậy } M \geq 4.$$

D.E. Hoạt động vận dụng và tìm tòi, mở rộng - Bài 8: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Câu 1: (trang 29 SGK Toán VNEN lớp 9 tập 1 chương 1)

Phân tích ra thừa số:

a) $x - 9$ với $x > 0$;

b) $x - 5\sqrt{x} + 4$

c) $6\sqrt{xy} - 4x\sqrt{x} - 9y\sqrt{y} + 6xy$

d) $x - 2\sqrt{x-1} - a^2$

Lời giải:

a) $x - 9 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$

b) $x - 5\sqrt{x} + 4 = x - \sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4$

$= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - 4(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4).$

c) $6\sqrt{xy} - 4x\sqrt{x} - 9y\sqrt{y} + 6xy =$

$2\sqrt{x}(3\sqrt{y} - 2x) - 3y(3\sqrt{y} - 2x) = (3\sqrt{y} - 2x)(2\sqrt{x} - 3y)$

d) $x - 2\sqrt{x-1} - a^2 = (x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1) - a^2$

$= (\sqrt{x-1} - 1)^2 - a^2 = (\sqrt{x-1} - 1 - a)(\sqrt{x-1} - 1 + a).$

Câu 2: (trang 29 SGK VNEN Toán 9 tập 1 chương 1)

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Cho $a > 0$ chứng minh rằng $a + \frac{1}{a} \geq 2$

b) $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$ với mọi a

c) $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$ với $a \geq 1$

Lời giải:

a) Với $a > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$$

Dấu = xảy ra khi $a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ (vì $a > 0$)

b) Ta có:

$$\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} = \frac{a^2 + a + 1 + 1}{\sqrt{a^2 + a + 1}} = \sqrt{a^2 + a + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + a + 1}}$$

Ta có: $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi a

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{a^2 + a + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{a^2 + a + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + a + 1}}} = 2$$

Dấu = xảy ra khi $\sqrt{a^2 + a + 1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \Leftrightarrow a^2 + a + 1 = 1$

$\Leftrightarrow a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = -1$

Vậy $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$ với mọi a .

c) Chứng minh $\sqrt{a + 1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

tức là ta chứng minh $\sqrt{a + 1} < \frac{1}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a}$

Với $a \geq 1$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} \geq$$

Câu 3: (trang 29 SGK Toán 9 VNEN tập 1 chương 1)

Cho $a \geq b \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$*) \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$*) \sqrt{a-b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Áp dụng

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$B = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$$

và giá trị lớn nhất của

$$C = \sqrt{2x-7} - \sqrt{2x-11}$$

Lời giải:

* Chứng minh: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$